ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Matematica. — *Sur la permutabilité de 2ième espèce.* Nota del sig. J. Soula, presentata dal Socio V. Volterra [1].

Nous allons étudier les relations qui ont lieu entre les solutions de deux équations intégrales sans second membre, à limites constantes, dont les noyaux sont permutables, et montrer que ces relations peuvent servir à l'étude de la permutabilité de 2ième espèce de Mr Volterra.

1. Voici une remarque qui généralise des résultats connus: Toute solution de l'équation

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \mathrm{K}(xs)\, \varphi(s)\, ds \tag{1}$$

est solution de

$$\varphi(x) = \mu \int_a^b \mathrm{N}(xs)\, \varphi(s)\, ds \tag{1'}$$

lorsque

$$\mathrm{N}(xy) = a_1\, \mathrm{K}(xy) + \cdots + a_n\, \mathrm{K}_n(xy)\,, \tag{2}$$

où les puissances désignent les opérations de la composition de 2ième espèce.

Il faut prendre: $\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{a_1}{\lambda} + \cdots + \dfrac{a_n}{\lambda^n}$ $\left(\text{nous supposons } \dfrac{1}{\mu} \neq 0\right)$. Mais en général les relations entre les solutions des équations (1) et (1') sont plus compliquées, lorsque $\mathrm{K}(xy)$ et $\mathrm{N}(xy)$ sont permutables sans être liées par la relation (2).

2. Dans tout ce qui suit, les intégrales seront prises entre les mêmes limites fixes, a et b, que nous n'écrirons plus. Le théorème suivant nous servira de point de départ:

$\mathrm{N}(xy)$ et $\mathrm{K}(xy)$ étant deux fonctions permutables, supposons que l'on ait:

$$\varphi(x) = \lambda \int \mathrm{N}(xs)\, \varphi(s)\, ds\,; \tag{3}$$

posons alors

$$\psi(x) = \lambda \int \mathrm{K}(xs)\, \varphi(s)\, ds\,. \tag{4}$$

Je dis que l'on a:

$$\text{ou bien} \quad \psi(x) = 0\,,$$

$$\text{ou bien} \quad \psi(x) = \lambda \int \mathrm{N}(xs)\, \psi(s)\, ds\,. \tag{5}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1912.

Supposons $\psi(x) \neq 0$. Partons de

$$\int N(xu)\, K(uy)\, du = \int K(xu)\, N(uy)\, du\,.$$

Donc

$$\int\int N(xu)\, K(uy)\, \varphi(y)\, du\, dy = \int\int K(xu)\, N(uy)\, \varphi(y)\, du\, dy$$

$$\int N(xu) \left\{ \int K(uy)\, \varphi(y)\, dy \right\} du = \int K(xu) \left\{ \int N(uy)\, \varphi(y)\, dy \right\} du$$

$$\int N(xu)\, \frac{\psi(u)}{\lambda}\, du = \int K(xu)\, \frac{\varphi(u)}{\lambda}\, du$$

$$\psi(x) = \lambda \int N(xu)\, \psi(u)\, du\,.$$

Il est facile de s'assurer que le cas où $\psi(x) = 0$ peut se produire; on n'a qu'a prendre:

$$K(xy) = N(xy) - \lambda \int N(xu)\, N(uy)\, du\,.$$

3. Soit $\varphi_1(x)\ \varphi_2(x)\ \ldots\ \varphi_n(x)$ un système de solutions linéairement independantes de l'équation

$$\varphi(x) = \lambda \int N(xs)\, \varphi(s)\, ds$$

pour une valeur caractéristique λ, de rang n.

On posera:

$$\psi_i(x) = \lambda \int K(xs)\, \varphi_i(s)\, ds \qquad (i = 1\,, 2\,, \ldots\,, n)\,.$$

Les fonctions $\psi_i(x)$, qui ne sont pas nulles, sont des combinaisons linéaires des fonctions $\varphi_i(x)$. On peut chercher à profiter de ce que les $\varphi_i(x)$ sont, dans une certaine mesure, indeterminées, pour simplifier les relations entre les $\varphi_i(x)$ et $\psi_i(x)$. On peut s'arranger pour que les ψ non nuls soient des formes linéaires indépendantes des φ. On aura alors des relations telles que

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= a_{11}\, \varphi_1(x) + \cdots + a_{1n}\, \varphi_n(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_q(x) &= a_{q1}\, \varphi_1(x) + \cdots + a_{qn}\, \varphi_n(x) \\ \psi_{q+1}(x) &= 0 \ldots \psi_n(x) = 0\,. \end{aligned}$$

Si on admet que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1q} \\ \dots\dots \\ a_{1q} \dots a_{qq} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, on peut ramener ces relations à la forme canonique:

$$(6)\quad \begin{cases} \psi_1(x) = s_1\,\varphi_1(x) \quad \psi_2 = s_1(\varphi_1 + \varphi_2) \dots \psi_\alpha = s_1(\varphi_{\alpha-1} + \varphi_\alpha) \\ \psi_{\alpha+1} = s_2\,\varphi_{\alpha+1} \quad \psi_{\alpha+2} = s_2(\varphi_{\alpha+1} + \varphi_{\alpha+2}) \dots \psi_{\alpha+\beta} = s_2(\varphi_{\alpha+\beta_{-1}} + \varphi_{\alpha+\beta}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi_{q+1} = 0 \dots \psi_n = 0 \end{cases}$$

($s_1\, s_2$ ... sont des constantes distinctes ou non distinctes).

Nous ne démontrerons pas ces formules: la méthode qui les donne est bien connue.

4. Montrons par un exemple que le cas où Δ est nul, peut se produire. Prenons

$$\begin{cases} \mathrm{N}(x\,,y) = \cos 2x \cos 2y + \cos x \cos y \\ \mathrm{K}(x\,,y) = a_1 \cos x \cos 2y + 0 + a_3 \cos 3x \cos 4y + \cdots \end{cases}$$

la série $\sum |a_n|$ étant convergente, les constantes a et b étant 0 et 2π.

Pour $\lambda = \dfrac{1}{\pi}$ on peut prendre

$$\varphi_1(x) = \cos 2x \quad \varphi_2(x) = \cos x\,.$$

On a

$$\psi_1(x) = a_1 \cos x = a_1\,\varphi_2(x)$$

$$\psi_2(x) = 0\,.$$

Δ est réduit à zéro.

5. Nous allons signaler, sans demonstrations, des cas importants où Δ n'est certainement pas nul.

Il est facile de montrer que, si $\Delta = 0$, on peut former une fonction $h(x)$ qui est une combinaison linéaire des fonctions $\varphi_i(x)$ et qui possède les propriétés suivantes:

$$\int \mathrm{K}(xs)\, h(s)\, ds \neq 0$$

$$\int \mathrm{K}_2(xs)\, h(s)\, ds = 0\,,$$

$K_2(xy)$ étant la fonction

$$K_2(xy) = \int K(xu)\, K(uy)\, du\,.$$

Si donc on est sûr qu'il n'existe aucune fonction $h(x)$ possédant cette propriété, on peut affirmer que Δ n'est pas nul.

C'est ce qui arrive quand $K(xy)$ est symétrique, lorsque $K(xy)$ est fermé, ou encore lorsque $K(xy)$ est la somme d'un nombre fini, ou d'une série régulierement convergente en x et en y de parties de noyau relatives à un pôle du noyau résolvant.

6. Supposons Δ nul. Nous transformerons alors les fonctions $\varphi_i(x)$ par le noyau $K_2(xy) = \int K(xu)\, K(uy)\, du$.

On obtient les fonctions:

$$h_i(x) = \lambda^2 \int K_2(xs)\, \varphi_i(s)\, ds = a_{i1}\, \psi_1 + \cdots + a_{iq}\, \psi_q \qquad \text{pour } i \leq q,$$

et

$$h_j(x) = 0 \qquad \text{pour } j > q\,.$$

Puisque Δ est nul, les fonctions $h(x)$ non nulles ne sont pas linéairement independantes. On peut alors, par une transformation convenable sur les $\varphi_i(x)$, augmenter le nombre des fonctions $h(x)$ nulles.

Si le nouveau déterminant analogue à Δ est alors encore nul, on remplacera $K_2(xy)$ par $K_4(xy)$; et ainsi de suite.

Il y a donc un noyau itéré de $K(xy)$ pour lequel les formules (6) sont vraies quand on remplace $K(xy)$ par ce noyau itéré.

7. Placons-nous dans le cas où les formules (6) sont applicables. On voit que $\varphi_1(x)$, $\varphi_{\alpha+1}(x)$... sont des solutions d'équations sans second membre, de noyau $K(xy)$.

Donc, si toutes les fonctions ψ ne sont pas nulles, il y a au moins une des solutions fondamentales de $N(xy)$ correspondant à la constante λ, qui est aussi solution fondamentale de $K(xy)$.

Les autres fonctions — $\varphi_2(x)$, $\varphi_\alpha(x)$ par exemple — sont des fonctions « principales » de $K(xy)$ correspondant à la constante caractéristique $\frac{\lambda}{s}$ de $K(xy)$ [1].

On sait que si $\frac{\lambda}{s_1}$ est un pôle simple du noyau résolvant de $K(xy)$, les fonctions principales $\varphi_2(x)$ ... $\varphi_\alpha(x)$ ne sauraient exister. Si le noyau ré-

[1] Goursat, Annales de la Faculté de Toulouse, 1908.

solvant du noyau $K(xy)$ n'a que des pôles simples, les formules (6) prennent nécessairement la forme

$$(7)\quad \begin{cases} \psi_1(x) = s_1\,\varphi_1(x)\,,\ \psi_2(x) = s_2\,\varphi_2(x)\ldots\psi_q(x) = s_q\,\varphi_q(x) \\ \psi_{q+1}(x) = 0\ldots\psi_n(x) = 0\,. \end{cases}$$

Ces formules seront toujours valables lorsque $K(xy)$ est symétrique. Si $N(xy)$ et $K(xy)$ sont symétriques, il est facile de voir que l'on peut s'arranger pour que

$$\int \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx = \begin{cases} \text{zéro si } i \neq j \\ 1 \quad \text{si } i = j \end{cases}$$

sans modifier les formules (7).

8. Soient $K(xy)$ et $q(xy)$ deux noyaux symétriques permutables. Posons

$$N(xy) = \int K(xs)\,q(sy)\,ds\,.$$

Soit $\varphi_1(x)\ldots\varphi_n(x)\ldots$ un système de solutions fondamentales de $K(xy)$. On designera par λ_n la constante caractéristique à laquelle correspond $\varphi_n(x)$. D'après le théorème de Hilbert-Schmidt

$$\int K(xs)\,q(sy)\,ds = \sum a_n(y)\cdot\varphi_n(x)\,,$$

cette série étant régulierement convergente en x.

D'après ce qui précède on a pu choisir le $\varphi_n(x)$ de manière à avoir: ou bien

$$\int q(xs)\,\varphi_n(s)\,ds = \frac{1}{\mu_n}\,\varphi_n(x)\,,$$

μ_n etant une constante caractéristique de $q(xy)$, ou bien

$$\int q(xs)\,\varphi_n(s) = 0\,.$$

Or

$$a_n(y) = \int\int \varphi_n(x)\,K(xs)\,q(sy)\,ds\,dx$$

$$a_n(y) = \int q(sy)\left\{\int K(xs)\,\varphi_n(x)\,dx\right\}ds$$

$$= \int q(sy)\,\frac{\varphi_n(s)}{\lambda_n}\,ds$$

On a donc: ou bien

$$a_n(y) = \frac{1}{\lambda_n\,\mu_n}\,\varphi_n(y)$$

ou bien

$$a_n(y) = 0 .$$

On arrive à la formule

$$\mathrm{N}(xy) = \int \mathrm{K}(xs)\, q(sy)\, ds = \sum \frac{\varphi_n(x)\, \varphi_n(y)}{\lambda_n\, \mu_n} .$$

Cette série ne contenant pas nécéssairement toutes les fonctions $\varphi_n(x)$, certains termes peuvent être remplacés par zéro.

Cette série réguliérment convergente en x, l'est aussi en y par symétrie.

Il résulte de ce calcul, que la fonction $\mathrm{N}(xy)$, produit de deux fonctions symétriques permutables, n'est pas quelconque: son « déterminant » $\mathrm{D}(\lambda)$, de Mr Fredholm, est de genre zéro. On peut aussi dire que l'ensemble de ses solutions fondamentales coëincide avec les solutions fondamentales communes à $\mathrm{K}(xy)$ et $q(xy)$.

10. Cherchons à former la fonction $q(xy)$, connaissant $\mathrm{N}(xy)$ et $\mathrm{K}(xy)$.

Le problème n'admet pas toujours des solutions. Les deux fonctions permutables symétriques $\mathrm{N}(xy)$ et $\mathrm{K}(xy)$ doivent verifier les conditions suivantes:

Il existe un système de solutions fondamentales de $\mathrm{N}(xy)$ qui sont aussi solutions fondamentales de $\mathrm{K}(xy)$.

Si $\varphi_n(x)$ est l'une de ces solutions nous désignerons par λ_n, μ_n, ν_n les constantes caractéristiques qui lui correspondent pour les fonctions $\mathrm{K}(xy)$, $q(xy)$, $\mathrm{N}(xy)$. La série $\sum \frac{1}{|\gamma_n|}$ doit converger.

Comme on aura $\mu_n = \frac{\gamma_n}{\lambda_n}$ il faut aussi que $\sum \frac{1}{\left(\frac{\gamma_n}{\lambda_n}\right)^2}$ converge.

Nous allons montrer que ces conditions sont suffisantes: Si $q(xy)$ existe elle a pour solutions fondamentales les fonctions $\varphi_n(x)$ correspondant aux constantes μ_n.

Un théorème de Mr Lauricella [1] montre qu'il existe une série de la forme:

$$\mathrm{R}(xy) = \sum_1^\infty \mathrm{Q}_i(xy) ,$$

avec

$$\mathrm{Q}_i(xy) = \sum_{n=\alpha_i}^{n=\beta_i} \frac{\varphi_n(x)\, \varphi_n(y)}{\mu_n}$$

uniformément convergente en x et y, sauf pour un ensemble de valeurs de x et de y de mesure superficielle nulle. De plus, cette fonction a pour con-

[1] Lauricella, Atti Lincei, 18 juin 1911.

stantes caractéristiques les nombres μ_n et pour fonctions fondamentales les $\varphi_n(x)$.

Cette série est évidemment permutable avec $K(xy)$ et $N(xy)$ car chaque terme possède cette propriété. Son produit symbolique avec $K(xy)$ admet comme solutions fondamentales les $\varphi_n(x)$ et ces fonctions seulement, avec comme constantes $\gamma_n = \lambda_n \mu_n$.

Ce produit symbolique, d'après un théorème de Mr Lauricella est donc égal à $N(xy)$.

$R(xy)$ est donc une solution. Ce n'est pas la seule en général. On obtient toutes les solutions en ajoutant à $R(xy)$ un noyau quelconque orthogonal à $K(xy)$.

Fisica. — *Gli sforzi interni nei corpi ferromagnetici posti nel campo magnetico.* Nota II preliminare di F. Piola e L. Tieri [1], presentata dal Socio P. Blaserna [2].

10. Due rocchettini, disposti ad angolo retto fra loro e normali al fascio catodico di un tubo di Braun, traversati dalle due correnti

$$i_1 = f_1(t) \text{ ed } i_2 = f_2(t),$$

producenti rispettivamente il campo e la forza esterna, davano il modo di apprezzare la forma

$$F(i_1, i_2) = 0$$

di una delle correnti rispetto all'altra.

Allorchè i due circuiti non abbracciavano ferro, la curva risultante $F = 0$ era, in generale, una elisse che diveniva un segmento rettilineo uguagliando le due costanti di tempo $\frac{L}{R}$. Se nel campo abbracciato da uno dei circuiti si introduceva ferro, la curva veniva a modificarsi, assumendo la nota forma dipendente dall'isteresi.

11. Un fascio luminoso, proveniente da un forellino illuminato da una lampada ad arco, riflesso dallo specchietto concavo applicato alla leva, veniva raccolto, dopo aver traversato una lente convergente, sopra uno specchio rotante. Senza campo e senza forza si vedeva nello specchio rotante una striscia luminosa rettilinea.

Mandando la corrente nella sola elica magnetizzante, cioè facendo agire la sola *tensione* prodotta dal campo, si osservava una curva periodica spostata in tal senso da indicare un accorciamento costante del filo, unito alla periodica variazione di lunghezza.

(1) Al Piola è dovuta la parte generale ed il metodo di ricerca, al Tieri la parte sperimentale.

(2) Pervenuta all'Accademia il 30 agosto 1912.