

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

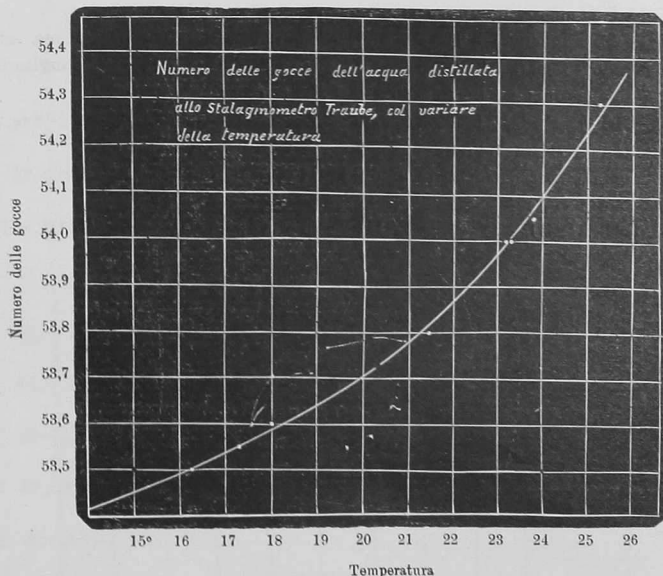
1912

Questi numeri mettono in evidenza il fatto notevole che fa riscontro all'altro osservato sulle prospicienti coste Sud-Ovest e Sud della Sicilia, cioè (a non parlare di Valletta, che appartiene ad una piccola isola) che le anomalie di gravità sono relativamente piccole, in ragione della posizione costiera delle tre stazioni tunisine esplorate: cosicchè chi voglia avanzare un'ipotesi sulla connessione che potrebbe esservi tra i fatti gravimetrici osservati sulla sponda siciliana del canale afro-sicilo, e la questione dell'innalzamento del fondo di questo, troverebbe buona conferma dai superiori risultati ottenuti sulla sponda tunisina del canale medesimo.

Chimica-fisica. — *Sulla tensione superficiale delle soluzioni proteiche* ⁽¹⁾. Nota II ⁽²⁾ del Corrisp. FILIPPO BOTTAZZI e del dott. E. D'AGOSTINO.

1. — Per le nostre esperienze ci siamo serviti di uno stalagmometro di Traube, i cui valori per l'acqua distillata abbiamo scrupolosamente determinati, anche per mettere in evidenza, in certo modo, gli errori inerenti alle nostre osservazioni. I valori trovati per l'acqua a varie temperature sono i seguenti:

Temperatura = t	Numero delle gocce = n
16,25°	53,50
17,30	53,55
18,00	53,60
21,45	53,80
23,30	54,00
23,80	54,05
25,25	54,30



⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia di Napoli.

⁽²⁾ La Nota I è pubblicata in questi Rendiconti, vol. XXI, 2° sem., pag. 221, 1912.

I risultati di queste misure, tradotti nella curva sottostante, ci hanno persuasi che gli errori di osservazione sono assai piccoli ($1/20$ di goccia al massimo).

La temperatura, alla quale sono state generalmente eseguite le nostre misure, ha variato dai 23° ai $25,5$; per tale intervallo di temperatura si ha, per l'acqua, un aumento di circa $1/3$ di goccia. Per molte misure, non è stato necessario curarsi di tale sorgente di errore, ma per alcune altre (ad es., per i dati delle tabelle III e IV) si è tenuto conto dell'influenza della temperatura, facendo le opportune correzioni, e propriamente correggendo i valori ottenuti per la temperatura media di 24° C.

Le nostre esperienze si dividono in due serie: nella prima serie, abbiamo studiato il variare del numero delle gocce della soluzione di sieralbumina, ossia del valore n , mantenendo costante la concentrazione dell'albumina, e variando le concentrazioni di HCl o di NaOH aggiunta; nella seconda serie, abbiamo mantenuto costanti le concentrazioni dell'albumina e del cloruro sodico, variando solamente le concentrazioni dell'HCl o della NaOH.

La tecnica da noi seguita è stata, ad esempio per la seconda serie, la seguente: Si è preparata una soluzione di determinata concentrazione di albumina e di NaCl; tale soluzione è stata divisa in due porzioni: alla prima porzione (porzione a) è stato aggiunto un dato volume di HCl oppure di NaOH; alla seconda porzione (porzione b) è stato aggiunto un volume eguale di acqua distillata. Le due soluzioni risultanti sono state alla loro volta suddivise in due porzioni eguali, di circa 10 cmc. ognuna. Si avevano in tal modo quattro soluzioni, che chiameremo a_1 ed a_2 quelle derivate dalla porzione a , e b_1 e b_2 quelle derivate dalla porzione b . Ciò fatto, si determinava il numero delle gocce della soluzione a_1 , e poi si ripetevano le misure dopo avere aggiunto, dapprima goccia a goccia e poi in quantità maggiori (fino a 10 cmc.), la soluzione b_1 . Per tale operazione serviva una pipetta da 1 cmc., divisa in ventesimi di cmc., trasformata in buretta mediante l'aggiunta di un tubo di gomma munito di una pinza.

Ciò fatto, si determinava il numero delle gocce della soluzione b_2 , e si ripetevano le misure, aggiungendo nello stesso modo precedente la soluzione a_2 .

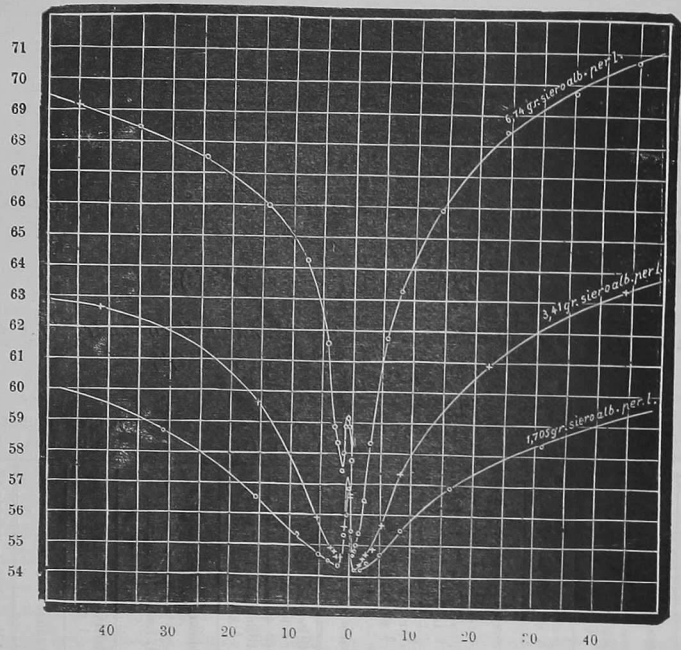
I valori delle tabelle I e II sono stati ottenuti con sieralbumina di bue, sottoposta a dialisi dal 9 all'11 marzo 1912 in acqua corrente, e dall'11 marzo all'8 luglio in acqua distillata, spesso ricambiata, tenuta sotto uno strato di toluolo.

I valori delle tabelle III e IV sono stati ottenuti con sieralbumina di bue identica alla precedente, e trattata nello stesso modo, ma in altro dializzatore.

Alla tabella I corrispondono le figure 1 e 1 bis; la fig. 1 bis non è che un ingrandimento della zona centrale della fig. 1.

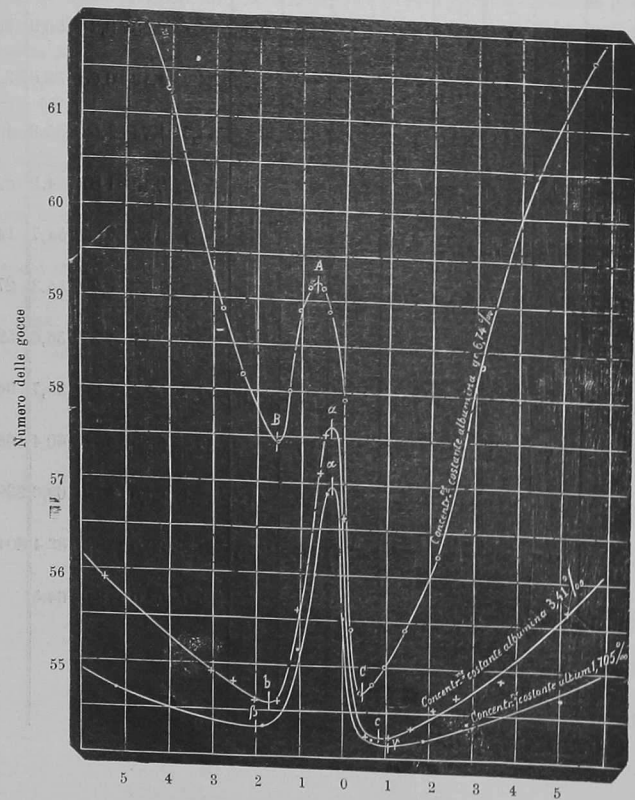
Alle tabelle II, III e IV corrispondono rispettivamente le figure II, III e IV.

Numero delle gocce (stalagmometro Trambe: acqua distillata a 23° gocce 53,97).



Millimol HCl aggiunte per gr. sieroalbumina. Millimol NaOH aggiunte per gr. sieroalbumina.

FIG 1.



Millimol HCl aggiunte a 1 gr. album. Millimol NaOH aggiunte a 1 gr. album.

FIG. 1 bis.

TABELLA II (fig. 2).

Influenza del cloruro sodico in mediocre concentrazione.

(Per tutte le soluzioni, la concentrazione costante della sieralbumina è stata di gr. 1,25 %₀₀).

Senza NaCl				Concentraz. costante NaCl: 75,8 millimol per litro				Concentraz. costante NaCl: 22,7 millimol per litro			
Millimol HCl aggiunto ad 1 litro di soluzione	Numero delle gocce = n	Millimol NaOH aggiunto ad 1 litro di soluzione	Numero delle gocce = n	Millimol HCl aggiunto ad 1 litro di soluzione	Numero delle gocce = n	Millimol NaOH aggiunto ad 1 litro di soluzione	Numero delle gocce = n	Millimol HCl aggiunto ad 1 litro di soluzione	Numero delle gocce = n	Millimol NaOH aggiunto ad 1 litro di soluzione	Numero delle gocce = n
0,00	56,9	0,00	56,9	0,00	58,0	0,00	58,1	0,00	57,4	0,00	57,2
0,90	57,6	1,00	54,3	1,00	60,1	0,83	57,6	0,50	58,4	0,33	56,4
2,64	57,4	2,64	54,4	1,98	61,5	1,98	56,9	0,99	59,0	0,99	56,0
3,94	55,9	5,21	54,6	2,96	63,6	2,96	57,2	1,64	59,4	1,48	55,9
6,18	55,0	15,7	56,3	3,94	65,1	3,94	57,6	2,21	60,1	2,13	55,7
8,06	55,3	30,6	58,8	5,05	65,3	5,86	58,2	2,61	60,6	3,72	55,8
10,2	55,8	53,3	60,4	6,01	65,0	11,4	59,8	3,25	61,3	5,57	56,0
15,7	57,1	88,8	62,5	7,13	64,8	29,6	61,9	3,72	61,5	9,27	56,6
29,6	59,7	133,0	64,4	8,06	64,8	53,3	63,3	4,18	61,4	14,8	57,4
53,3	61,6			9,93	64,4	133,0	65,6	4,81	61,1	26,6	58,9
88,8	63,6			12,1	64,3			5,88	60,5	44,4	59,7
133,0	65,4			16,2	64,3			7,53	59,9	66,6	60,6
				29,6	64,4			8,26	59,9		
				53,2	65,0			9,27	59,8		
				133,0	67,0			11,1	59,8		
								14,8	60,1		
								26,6	61,0		
								44,4	62,4		
								66,6	63,3		

Numero delle gocce (stalagmometro Traube: acqua a 23° C., gocce 33,87).

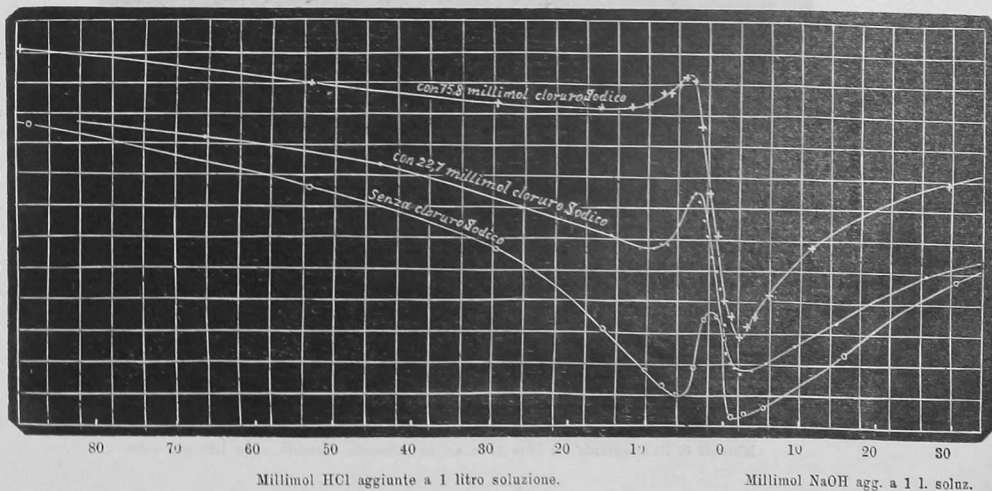


FIG. 2.

TABELLA III (fig. 3).

Influenza del cloruro sodico in piccola concentrazione.

(Tutte le soluzioni contengono gr. 1,25 ‰ di sieroalbumina; i dati sono corretti alla temperatura 24° C.).

Senza NaCl		Concentraz. costante NaCl: 1,25 millimol per litro	
Millimol HCl aggiunte a 1 litro di soluzione	Numero delle gocce = <i>n</i>	Millimol HCl aggiunte a 1 litro di soluzione	Numero delle gocce = <i>n</i>
0,00	55,17	0,00	55,56
0,25	57,58	0,41	57,89
0,41	57,44	1,07	56,44
0,50	57,36	1,80	54,80
0,88	55,78	2,45	54,50
1,64	54,60	3,09	54,50
2,18	54,20	4,34	54,50
2,41	54,20	6,78	54,70
3,25	54,20	10,7	55,33
5,11	54,30	18,6	56,33
7,41	54,50	26,6	57,11
14,8	55,44		
26,6	56,89		

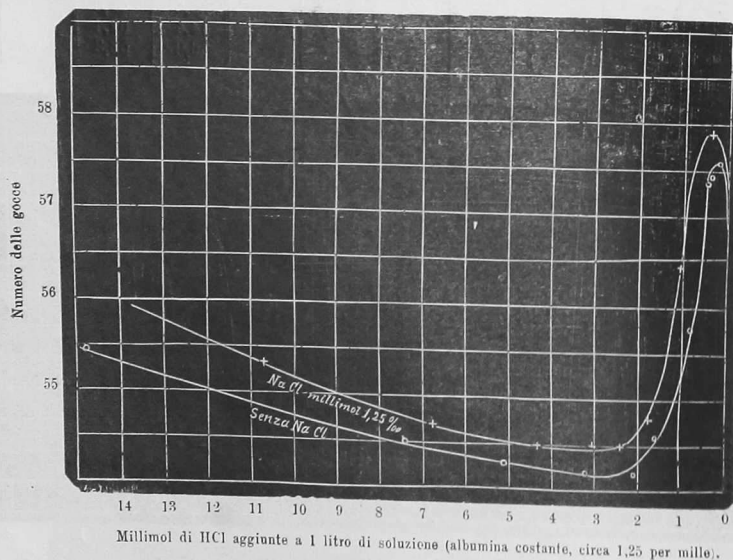


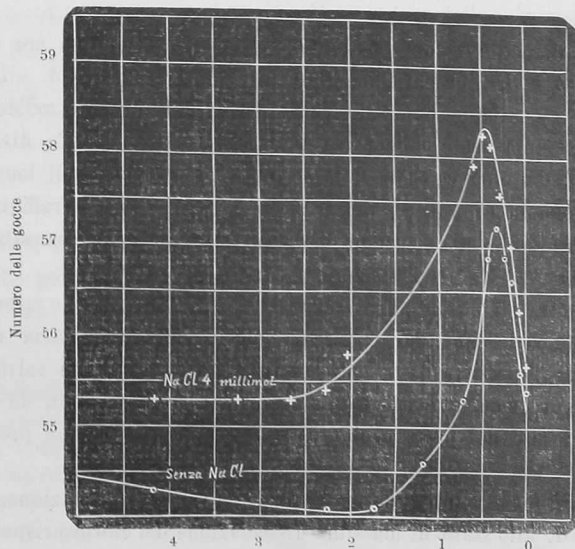
FIG. 3.

TABELLA IV (fig. 4).

Influenza del NaCl in piccola concentrazione.

(Tutte le soluzioni contengono gr. 1,25 di sieroalbumina per litro; i dati sono corretti alla temperatura 24,0° C.).

Senza NaCl		Concentraz. costante NaCl: 4 millimol per litro	
Millimol HCl aggiunte ad 1 litro di soluzione	Numero delle gocce = <i>n</i>	Millimol HCl aggiunte ad 1 litro di soluzione	Numero delle gocce = <i>n</i>
0,000	55,40	0,000	55,70
0,075	55,60	0,087	56,30
0,162	56,67	0,174	57,03
0,248	56,89	0,296	57,59
0,333	57,22	0,394	58,14
0,430	56,89	0,490	58,26
0,728	55,30	0,586	57,92
1,19	54,60	2,03	55,80
1,74	54,10	2,27	55,40
2,27	54,10	2,68	55,30
4,17	54,30	3,26	55,30
7,14	54,50	4,17	55,30
12,5	54,90	25,0	57,48



Millimol HCl aggiunte a 1 litro soluzione albumina costante, circa 1 per mille.

FIG. 4.

3. *Considerazioni generali, e conclusioni.* — Dalla tabella I su riportata, ed ancora meglio dalle due figure (figg. 1 e 1 bis) che ad essa corrispondono, si desume un andamento assai caratteristico della variazione del numero delle gocce di una soluzione di sieralbumina, in seguito all'aggiunta di HCl e di NaOH. Fermandoci all'esame della fig. 1 bis, che è un ingrandimento della zona centrale della fig. 1, faremo notare come all'ascissa zero corrisponde il valore n della soluzione di albumina originaria, e come a destra e sinistra di tale ascissa sono stati disposti rispettivamente i valori n ottenuti per le aggiunte di base e per le aggiunte di acido. Ogni curva presenta un massimo mediano (A, a, α) e due minimi laterali (B, b, β nella zona acida, e C, c, γ nella zona alcalina) del valore n , in modo che si possono in ogni curva considerare quattro porzioni, che designeremo brevemente nel modo seguente: considerando solamente la curva superiore, chiameremo la prima porzione, a sinistra di B , *porzione B*; la seconda, *porzione BA*; la terza, *porzione AC*; e la quarta, a destra di C , *porzione C*; per le altre curve si adotterà una nomenclatura analoga.

L'unica maniera di spiegare logicamente queste curve ci sembra quella di ammettere che *il valore n dipenda esclusivamente dalle molecole indissociate di proteina, più propriamente dalle molecole di proteina indissociata e dalle molecole indissociate dei sali della proteina, nel senso che ad un aumento di n (cioè ad una diminuzione della tensione superficiale della soluzione) corrisponda un aumento della concentrazione delle molecole suddette.*

I massimi A, a e α corrisponderebbero alla sieralbumina non salificata; i minimi B, b e β , alla massima dissociazione del cloruro di albumina; i minimi C, c e γ , alla massima dissociazione dell'albuminato sodico; le porzioni B, b e β rappresenterebbero la graduale diminuzione della dissociazione del cloruro d'albumina causata dall'aggiunta progressiva dell'ione Cl' , che sarebbe un ione in comune; e del pari le porzioni C, c e γ raffigurerebbero la diminuzione della dissociazione dell'albuminato sodico causata dall'aggiunta progressiva dell'ione in comune Na .

La soluzione di albumina dializzata, che ci è servita alle ricerche, deve essere ritenuta come impura per alcali, onde è stata necessaria una certa aggiunta di HCl per riportarla allo stato di albumina non salificata, nel quale stato essa viene di conseguenza a trovarsi accompagnata da una certa quantità di cloruro del metallo che si trovava nella soluzione proteica originale.

Per portare l'albumina dallo stato di minima dissociazione, cioè dai punti A, a e α , allo stato di massima dissociazione del cloruro rispettivo, cioè ai punti B, b , e β , sono state necessarie le seguenti aggiunte di HCl (come si desume dalla fig. 1 bis).

	Concentrazione albumina	Millimol HCl per 1 gr. di albumina
1 ^a soluzione . . .	6.74 ‰	0,9
2 ^a " . . .	3.41 "	1,4
3 ^a " . . .	1,705 "	1,7

Per portarla invece allo stato di massima dissociazione dell'albuminato, cioè dai punti *A. a* e α ai punti *C. c* e γ , sono state necessarie le aggiunte seguenti di NaOH (come si desume dalla fig. 1 bis):

	Concentrazione albumina	Millimol NaOH per 1 gr. di albumina
1 ^a soluzione . . .	6.74 ‰	1,1
2 ^a " . . .	3.41 "	1,15
3 ^a " . . .	1,705 "	1,3

Bisogna, dunque, aggiungere nelle soluzioni più diluite una maggiore quantità di acido o di base per portare il sale d'albumina allo stato di massima dissociazione. La spiegazione di questo fenomeno è ovvia, se ci riportiamo alle proprietà caratteristiche di quei sali, di cui il componente acido o basico sia costituito da un elettrolito assai debole: ad esempio, alle proprietà del cianuro potassico. Siccome l'acido cianidrico è un elettrolito e assai debole, le soluzioni di cianuro potassico puro sono notevolmente alcaline, poichè una certa quantità di detto sale si scinde formando soda libera e acido cianidrico indissociato; e con l'aumentare della diluizione, aumenta il grado di scissione idrolitica. Infatti, Shields (1) ha trovato sperimentalmente:

KCN concentrazione mol.	0,947	grado di idrolisi	0,31
"	0,235	"	0,72
"	0,095	"	1,12
"	0,024	"	2,34

I gradi d'idrolisi nel nostro caso devono essere assai più notevoli dei precedenti, poichè le nostre concentrazioni sono assai piccole (probabilmente, meno di una millimol di albumina per litro) (2).

(1) Zeitschr. f. physik. Ch., Bd. XII, pag. 167 (1898).

(2) Calcolando la idrolisi dei sali di albumina in base alle ricerche recenti di d'Agostino e Quagliariello (Nernst-Festschrift, pag. 27 [1912]), per le tre concentrazioni dei nostri esperimenti, si trovano i valori seguenti:

Albuminato sodico: concentraz.	6,74 gr. alb. ‰	grado d'idrolisi	6,9 ‰
"	3,41 "	"	9,6 "
"	1,705 "	"	13,2 "
Cloruro di albumina: concentraz.	6,74 "	"	1,81 "
"	3,41 "	"	2,53 "
"	1,705 "	"	3,56 "

Si comprende, inoltre, che per deprimere l'idrolisi del cianuro potassico e portarlo in tal modo allo stato di massima dissociazione, è necessario aggiungere un notevole eccesso di potassa; allo stato di massima dissociazione del cianuro potassico non si ha dunque una corrispondenza stechiometrica fra la quantità dell'acido cianidrico e la quantità di KOH che si è dovuta aggiungere; ma tale ultima quantità è di molto superiore a quella molecularmente corrispondente.

Nel nostro caso, le quantità sia di NaOH sia di HCl da aggiungere, si aggirano attorno ad una millimol per 1 gr. di albumina, ossia di una mol per 1000 gr. di albumina; in conseguenza di ciò, *il peso molecolare dell'albumina deve essere di alquanto superiore a 1000*. Tale risultato è perfettamente in accordo con quanto si conosce fin'oggi su tale grandezza.

In conclusione, la interpretazione da noi data del fenomeno viene innanzi tutto giustificata da questi tre fatti importanti, che si trovano perfettamente in accordo con i principii della chimica generale:

1°) le quantità di acido o di base da aggiungere all'albumina, per portarla allo stato massimo di dissociazione, aumentano coll'aumentare della diluizione;

2°) le quantità predette di acido sono dello stesso ordine di grandezza delle quantità di alcali;

3°) bisogna presupporre che l'albumina abbia un peso molecolare maggiore di 1000.

Per spiegare le altre proprietà delle nostre curve, *bisogna ammettere che il cloruro di albumina sia, a parità di concentrazioni, assai meno dissociato dell'albuminato sodico*; in altre parole, il cloruro di albumina sarebbe un vero e proprio elettrolito debole, mentre l'albuminato sodico sarebbe un elettrolito mediocrementemente forte.

Infatti, col crescere della concentrazione, i minimi β , b e B vanno mano sollevandosi assai più dei minimi γ , c e C ; e mentre nelle soluzioni più diluite tali minimi si trovano a un livello di poco differente, nella soluzione più concentrata il dislivello fra i due minimi (B e C) è assai notevole; nelle soluzioni più diluite, dunque, i gradi di dissociazione dei due sali non sono molto differenti fra loro, mentre nelle soluzioni più concentrate la differenza fra i gradi di dissociazione è assai notevole. Anche ciò è in accordo perfetto con i principii della chimica-fisica.

Bisogna anche notare che tutte le particolarità secondarie delle curve si spiegano ammettendo l'ipotesi suaccennata. Infatti, la scarsa dissociazione del cloruro influisce su tutta la porzione di curva che si trova nella zona acida, sollevandola in tutte le sue parti: il sollevamento è scarso a partire dal punto A , ma va man mano accentuandosi verso il punto B , col crescere della concentrazione del cloruro d'albumina; perciò le porzioni di curva della zona acida sono meno concave delle porzioni di curva della zona alcalina;

e mentre le porzioni AC , ac , $\alpha\gamma$ sono l'una all'altra assai vicine, le porzioni AB , ab , $\alpha\beta$ si allontanano notevolmente l'una dall'altra.

I fatti precedenti sono assai più evidenti nelle ricerche fatte a concentrazione costante di albumina e di cloruro sodico (cfr. le tabelle II, III e IV, e le figure corrispondenti 2, 3 e 4). Il cloruro sodico, avendo ioni in comune con ambedue i sali dell'albumina, ne diminuisce la dissociazione; ma mentre tale influenza è assai notevole sul cloruro di albumina, lo è poco sull'albuminato sodico; quindi le porzioni di curva della zona acida sono assai sollevate, e la loro concavità va diminuendo progressivamente col crescere della concentrazione del cloruro sodico. Anche qui la massima influenza si esercita sul cloruro completamente dissociato (punti B), ed è minore sui punti A , ossia sugli apici delle curve.

Vi sono infine due fatti importanti, di assai malagevole interpretazione:

1°) Come si rileva dalle figg. 2, 3 e 4, ma in particolar modo dalla fig. 2, le aggiunte di NaCl deprimono fortemente anche la dissociazione dell'albumina non salificata ⁽¹⁾ (gli apici delle curve si spostano in alto, cioè i valori n aumentano, ossia la tensione superficiale diminuisce). Ma in questo caso non si può parlare di ioni in comune, onde la diminuzione della dissociazione dell'albumina deve attribuirsi ad altre ragioni. La causa più probabile, noi riteniamo sia la cosiddetta *formazione dei prodotti laterali indissociati*, che si spiegherebbe col meccanismo seguente: aggiungendo NaCl , noi aggiungiamo sodioioni e cloroioni; i sodioioni si combinano con gli albuminioni della albumina pura e formano albuminato sodico indissociato, e dall'altro lato i cloroioni si combinano con gli albuminioni e formano cloruro di albumina indissociato; ma la seconda combinazione è di importanza assai maggiore che la prima, data la scarsa dissociazione del cloruro di albumina.

(1) La dissociazione dell'albumina non salificata deve considerarsi come abbastanza notevole, se si ammette che i valori K_a e K_b trovati da d'Agostino e Quagliariello (loc. cit.) siano sufficientemente esatti. Ciò risulta dal seguente calcolo: La frazione q di molecola di una data sostanza anfotera, che rimane indissociata (il così detto « Dissociationsrest » di Michaelis), può essere ricavata per mezzo della seguente formola:

$$q = \frac{1}{1 + \frac{K_a}{[\text{H}^+]} + \frac{K_b}{[\text{OH}^-]}}$$

(Cfr. Michaelis, Bioch. Zeit., Bd XXXIII, pag. 184 [1911]).

Secondo i dati di d'Agostino e Quagliariello, alle soluzioni di albumina pura corrispondono i valori:

$$\begin{array}{ll} K_a = 0,0,91 & [\text{H}^+] = 0,0,27 \\ K_b = 0,0,14 & [\text{OH}^-] = 0,0,37 \end{array}$$

Avremo dunque:

$$q = \frac{1}{1 + \frac{0,0,91}{0,0,27} + \frac{0,0,14}{0,0,37}} = 0,93,$$

ossia, l'albumina pura in soluzione acquosa si trova allo stato di molecole non dissociate nella proporzione del 93%, mentre il resto, cioè circa il 7%, è dissociato in ioni positivi e negativi.

2°) Come si rileva in particolar modo dalla fig. 2, ma anche, sebbene in grado minore, dalle figg 3 e 4, gli apici delle curve, corrispondenti ai punti che prima abbiamo chiamati *A*, per l'aggiunta di NaCl si spostano verso la sinistra della figura, e lo spostamento è tanto maggiore, quanto maggiore è la quantità di cloruro sodico aggiunto. Tale spostamento può avere la seguente spiegazione: l'apice della curva normale (cfr. fig. 2), della curva cioè che rappresenta i valori ottenuti senza cloruro sodico, non è aguzzo, ma presenta una specie di *plateau* (1); questo sta a significare che esiste una certa zona attorno al punto *A*, nella quale si verifica una certa costanza del contenuto ionico totale; ma mentre nel punto *A* esistono quantità di albuminazioni e di albuminazioni poco differenti fra loro, a sinistra di tale punto aumenta fortemente la quantità degli albuminazioni a spese degli albuminioni, pur rimanendo la loro somma quasi costante; a destra del punto *A* si ha il fatto contrario, ossia l'albuminazione aumenta fortemente a spese dell'albuminazione. Per quello che si è detto innanzi, il cloruro sodico agisce specialmente sull'albuminazione, provocando la formazione di cloruro di albumina indissociato. Per tali ragioni l'apice della curva si sposta verso la sinistra, con l'aumentare delle concentrazioni del cloruro sodico.

Anche gli spostamenti degli apici della fig. 1 bis si spiegano in modo analogo: infatti all'ascissa zero corrisponde un'albumina inquinata di alcali; ed al punto *A*, per la neutralizzazione di tale alcali, si ha albumina non salificata e cloruro alcalino; il quale è tanto più concentrato, quanto più concentrata è la soluzione di albumina: dunque con l'aumentare della concentrazione dell'albumina, l'apice della curva si sposta man mano verso la sinistra.

Matematica. — *Sulle operazioni lineari, e sulla teoria delle equazioni integrali.* Nota del Socio S. PINCHERLE.

In una Nota pubblicata nei Rendiconti di questa Accademia nel giugno del corrente anno (2), l'ing. G. Giorgi mette giustamente in rilievo i vantaggi che si hanno nella teoria delle equazioni (direi, piuttosto, delle operazioni) integrali lineari ed integro-differenziali, specie nell'importante e geniale capitolo che in questa teoria è dovuto alle fondamentali ricerche del Volterra, quando se ne riattacchi lo studio ai principi cui dà luogo il calcolo delle operazioni lineari in astratto. Convengo tanto più volentieri in questo pensiero, in quanto che è appunto al medesimo concetto che si ispirano alcuni recenti miei lavori (3). Se, con ragione, dai moderni creatori della teoria delle equazioni integrali si è considerato prevalentemente il lato, che si potrebbe dire *aritmetico*, della teoria stessa, come quello che viene maggiormente invocato dalle applicazioni, pure anche il lato *geometrico* o di struttura del nuovo

(1) Una figura assai simile si otterrebbe, costruendo la cosiddetta *Dissociationsrestkurve* di Michaelis, prendendo a base di tale costruzione i valori ricavati da d'Agostino e Quagliariello (cfr. loc. cit.).

(2) *Sulla teoria delle equazioni integrali e delle loro generalizzate.* Rend. Accad. Lincei, tom. XXI, 5, 16 giugno. 1912.

(3) Ved. Memorie dell'Accad. di Bologna, serie VI, tom. III (1906) e tom. VIII (1911).