ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

2°) Come si rileva in particolar modo dalla fig. 2, ma anche, sebbene in grado minore, dalle figg 3 e 4, gli apici delle curve, corrispondenti ai punti che prima abbiamo chiamati A, per l'aggiunta di NaCl si spostano verso la sinistra della figura, e lo spostamento è tanto maggiore, quanto maggiore è la quantità di cloruro sodico aggiunto. Tale spostamento può avere la seguente spiegazione: l'apice della curva normale (cfr. fig. 2), della curva cioè che rappresenta i valori ottenuti senza cloruro sodico, non è aguzzo, ma presenta una specie di *plateau* (¹); questo sta a significare che esiste una certa zona attorno al punto A, nella quale si verifica una certa costanza del contenuto ionico totale; ma mentre nel punto A esistono quantità di albumincationi e di albuminanioni poco differenti fra loro, a sinistra di tale punto aumenta fortemente la quantità degli albumincationi a spese degli albuminanioni, pur rimanendo la loro somma quasi costante; a destra del punto A si ha il fatto contrario, ossia l'albuminanione aumenta fortemente a spese dell'albumincatione. Per quello che si è detto innanzi, il cloruro sodico agisce specialmente sull'albumincatione, provocando la formazione di cloruro di albumina indissociato. Per tali ragioni l'apice della curva si sposta verso la sinistra, con l'aumentare delle concentrazioni del cloruro sodico.

Anche gli spostamenti degli apici della fig. 1 *bis* si spiegano in modo analogo: infatti all'ascissa zero corrisponde un'albumina inquinata di alcali; ed al punto A, per la neutralizzazione di tale alcali, si ha albumina non salificata e cloruro alcalino; il quale è tanto più concentrato, quanto più concentrata è la soluzione di albumina: dunque con l'aumentare della concentrazione dell'albumina, l'apice della curva si sposta man mano verso la sinistra.

Matematica. — *Sulle operazioni lineari, e sulla teoria delle equazioni integrali.* Nota del Socio S. PINCHERLE.

In una Nota pubblicata nei Rendiconti di questa Accademia nel giugno del corrente anno (²), l'ing. G. Giorgi mette giustamente in rilievo i vantaggi che si hanno nella teoria delle equazioni (direi, piuttosto, delle operazioni) integrali lineari ed integro-differenziali, specie nell'importante e geniale capitolo che in questa teoria è dovuto alle fondamentali ricerche del Volterra, quando se ne riattacchi lo studio ai principî cui dà luogo il calcolo delle operazioni lineari in astratto. Convengo tanto più volentieri in questo pensiero, in quanto che è appunto al medesimo concetto che si inspirano alcuni recenti miei lavori (³). Se, con ragione, dai moderni creatori della teoria delle equazioni integrali si è considerato prevalentemente il lato, che si potrebbe dire *aritmetico*, della teoria stessa, come quello che viene maggiormente invocato dalle applicazioni, pure anche il lato *geometrico* o di struttura del nuovo

(¹) Una figura assai simile si otterrebbe, costruendo la cosiddetta *Dissociationsrestkurve* di Michaelis, prendendo a base di tale costruzione i valori ricavati da d'Agostino e Quagliariello (cfr. loc. cit.).

(²) *Sulla teoria delle equazioni integrali e delle loro generalizzate*. Rend. Accad. Lincei, tom. XXI, 5, 16 giugno. 1912.

(³) Ved. Memorie dell'Accad. di Bologna, serie VI, tom. III (1906) e tom. VIII (1911).

calcolo, quello cioè che si trova in dipendenza più immediata col calcolo generale delle operazioni, ha la sua importanza; esso permette di porre fra loro in relazione questioni apparentemente diverse, di sceverare procedimenti e dimostrazioni da complicazioni non di rado parassitarie e dovute alla forma speciale delle espressioni analitiche adoperate, infine di ricorrere più immediatamente ai sussidî che forniscono l'analogia e l'intuizione.

Gli accennati principî generali della teoria delle operazioni lineari dànno luogo, come giustamente osserva il Giorgi, ad un'algebra la cui algoritmìa è affine all'ordinaria, differendone principalmente per la mancanza della proprietà commutativa della moltiplicazione. Non è però questa sola che stabilisce il divario. Anche conservandosi questa proprietà — come nella bella teoria, già ricordata, dovuta al Volterra —, se viene accentuata l'analogia con l'algebra ordinaria (¹), pure le differenze si devono al mancare del principio di annullamento del prodotto, e nella teoria generale astratta delle operazioni lineari commutabili (²) è appunto di precipua importanza l'interpretazione dell'annullarsi di un prodotto di tali operazioni.

Nell'ordine dei miei citati lavori e della comunicazione dell'ing. Giorgi, si presenta una questione interessante: fino a quale grado, cioè, sia possibile di sviluppare in forma astratta la teoria degli operatori, e a quale punto si presenti la necessità di particolareggiarne la natura, introducendo per essi opportune espressioni analitiche, ad esempio in forma di integrali definiti. Nella presente Nota mi propongo di portare un lieve contributo a tale questione, e, nel tempo stesso, per dare un esempio del grado di chiarezza e di perspicuità che l'uso del calcolo degli operatori porta in varie parti della teoria delle equazioni funzionali lineari, di accennare a quest'uso nel capitolo della teoria di queste equazioni che tratta della risolvente, quale è considerata dal Goursat nella nota sua Memoria (³), riprodotta, nelle sue parti sostanziali, nel recente trattato del Lacesco (⁴).

1. Sia dato uno spazio lineare S; sia A un'operazione lineare univoca, non degenere, operante in questo spazio e producente, come risultato, enti dello spazio medesimo. Per fissare le idee, gli enti di S siano funzioni di una variabile. Per l'operazione A, ammetteremo che $\sqrt[n]{|A^n|}$ abbia, per un aggregato di elementi di S limitato nel suo insieme, un massimo limite finito. Sotto a questa condizione, la serie $\Sigma h^n A^n$ è, rispetto al parametro h,

(¹) Ved. le Note pubblicate dal Volterra in questi Rendiconti, nel 1910 e 1911; in particolare la Comunicazione del 20 febbraio 1910. Ved. anche i miei *Appunti di calcolo funzionale*, Mem. Accad. Bologna, serie VI, tom. VIII, § III.

(²) Pincherle e Amaldi, *Le operazioni distributive*, Bologna, Zanichelli (1910), cap. III, pp. 36-49.

(³) *Recherches sur les intégrales linéaires*. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, série II, tom. I, pag. 5 (1908).

(⁴) *Introduction à la théorie des équations intégrales*. Paris, Hermann (1912).

un elemento di funzione analitica; essa, nel suo campo di monodromia ottenuto dalla serie stessa mediante continuazione analitica ed un opportuno sistema di tagli, dà, per gli elementi di S, un'operazione lineare $R = R_h$ che si dirà risolvente di A. Nel cerchio di convergenza della serie dapprima, poi, per il principio di conservazione delle proprietà analitiche, in tutto il suo campo di monodromia, si verifica immediatamente che la R soddisfa alla relazione

$$R - hAR = A \tag{1}$$

e all'altra

$$R_h - R_k = (k - h) R_h R_k ; \tag{2}$$

questa ultima, che si potrebbe anche prendere come definizione della risolvente, è quella stabilita dall'Hilbert [1] per la risolvente, sotto forma d'integrale definito, della classica equazione di Fredholm.

2. Supponiamo che la R, come funzione di h, ammetta un polo di primo ordine; vale allora la decomposizione

$$R = \frac{B}{h - c} + P , \tag{3}$$

dove B e P sono simboli di operazioni lineari: B indipendente da h, P funzione analitica di h regolare per $h = c$. Sostituendo in (1) e passando al limite, viene

$$B - cAB = 0 ;$$

questa relazione esprime che « qualunque sia l'elemento φ di S su cui si « opera, $B(\varphi)$ appartiene ad uno spazio H_c i cui elementi sono invarianti « (autofunzioni) per l'operazione A, ed il numero c è il numero invariante « (autonumero) corrispondente ».

Sostituendo la (3) in (2), viene, con semplice riduzione,

$$B^2 = B , \quad BP = PB = 0 . \tag{4}$$

A questo punto si introduce naturalmente il concetto di operazioni ortogonali: due operazioni lineari M, N sono tali quando sia

$$MN = NM = 0 ;$$

sono semi-ortogonali quando sia soddisfatta una sola di queste relazioni.

Le due operazioni B e P che si presentano nella decomposizione (3) sono ortogonali. Esse sono senza radici comuni, perchè, ove α fosse radice

[1] *Grundzüge einer allg. Theorie der lin. Integralgleichungen* (Erste Mitteilung). Gott. Nachr., 1904, pag. 71. Cfr. Lalesco, op. cit., pag. 43.

di B e P, questa radice verrebbe ammessa anche dalla R; ma A è supposto non degenere, cioè senza radici: quindi, per la (4), deve essere tale anche R.

Da ciò, per un teorema generale sulle operazioni permutabili senza radici comuni [1], segue che ogni elemento φ di S può decomporsi nella forma

$$\varphi = \beta + \pi ,$$

dove β è radice di B, e π radice di P. Ma, con ragionamenti dei più ovvii, si ha la seguente catena di osservazioni:

ogni $B(\varphi)$ è un η, elemento invariante di A relativo a c;
ogni radice di P è un elemento η;
ogni elemento π è della forma $B(\varphi)$;
la decomposizione di φ in $\beta + \pi$ è unica;
ogni elemento η è radice di P;
onde le radici π di P sono tutti e soli gli elementi invarianti di A relativi a c. Si ha dunque che « lo spazio S è decomponibile univocamente « in due spazî S_1 ed H_c; il primo è lo spazio radice di B, il secondo lo « spazio degli elementi invarianti relativi a c ed è generato dall'applicazione « di B sullo spazio S ».

3. Ammettiamo ora che lo spazio H_c sia ad m dimensioni, e sia

$$\eta_1 , \eta_2 , \dots \eta_m$$

una sua base. Essendo φ un elemento qualunque di S, sarà

$$B(\varphi) = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + \cdots c_m \eta_m . \tag{5}$$

Per essere η_i risultato dell'applicazione di B ad un elemento di S, e per essere $B^2 = B$, viene $B(\eta_i) = \eta_i$.

I termini $c_i \eta_i$ della (5) possono riguardarsi come il risultato di una operazione lineare C_i applicata a φ; la costante c_i è risultato dell'operazione $\frac{1}{\eta_i} C_i$. Per la loro definizione, le operazioni C_i soddisfano alle relazioni

$$C_i^2 = C_i , \quad C_i C_j = 0 ; \tag{6}$$

la B è decomposta nella somma

$$B = C_1 + C_2 + \cdots C_m$$

di operazioni aventi le proprietà (6).

Ma poichè la $\frac{1}{\eta_i} C_i$ è un'operazione lineare che trasforma un elemento funzionale in una costante, essa è rappresentabile, sotto condizioni larghissime, nella forma

$$\frac{1}{\eta_i} C_i(\varphi) = \int_a^b \psi_i(y) \varphi(y) \, dy , \tag{7}$$

[1] Pincherle e Amaldi, op. cit., pag. 37.

come ha dimostrato il Fréchet (¹) sulle traccie dell'Hadamard. Ne viene per B l'espressione

$$B = \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy \tag{8}$$

con

$$K(x, y) = \sum_1^m \psi_i(y)\, \eta_i(x) . \tag{9}$$

Dalle proprietà (6) consegue molto facilmente la biortogonalità delle funzioni ψ ed η; è notevole come si sia così ricaduti, partendo da considerazioni di indole astratta, sulle espressioni integrali usuali e sulle proprietà che loro appartengono. Si tralascia la ovvia generalizzazione ad un numero arbitrario di poli di R di ordine qualunque.

4. Dando alle operazioni la forma integrale, il concetto di operazioni ortogonali si traduce in quello, indicato dal Goursat, di nuclei ortogonali. Su questi, si hanno alcuni teoremi dati appunto dal Goursat (²) e riportati dal Lalesco nella citata opera (³); ora, questi teoremi si estendono, per via astratta, ad operazioni lineari in genere in modo così semplice ed affrancato da sviluppi di calcolo, che, nonostante il loro carattere elementare, mi pare valga la pena di accennarne la dimostrazione.

Il primo di questi teoremi consiste in ciò: se A e B sono operazioni fra loro semiortogonali, cioè soddisfanno ad una delle due relazioni $AB = 0$ o $BA = 0$, i numeri invarianti di $A + B$ sono tutti e soli quelli di A e di B.

a) Sia c numero invariante di $A + B$; avrà di conseguenza soluzione l'equazione

$$\varphi - c(A + B)\varphi = 0 ;$$

se è $BA = 0$, si applichi la B; viene

$$B\varphi - cB^2\varphi = 0 ,$$

onde segue, o $B\varphi = 0$, ma allora è $\varphi - cA\varphi = 0$ e c numero invariante di A, oppure $(1 - cB)B\varphi = 0$, e allora c è numero invariante di B.

b) Inversamente, sia c numero invariante di A:

$$\varphi - cA\varphi = 0 .$$

Se è $BA = 0$, viene

$$(1 - c(A + B))A\varphi = 0 ,$$

(¹) *Sur les opérations linéaires*, Transactions of the Americ. Math. Society, tom. 5 (1904), pag. 96.

(²) Compt. rend. de l'Acad. des Sciences, Paris, tom. 145, pp. 667, 752 (1907).

(³) pp. 41-43.

onde c è numero invariante di $A+B$; se è $AB=0$, allora, o c è numero invariante di B, ha soluzione la

$$\psi - c\,B\psi = 0$$

e si torna al caso precedente: oppure c non è numero invariante di B, e allora ha soluzione la

$$\psi - c\,B\psi = \varphi = c\,A(\varphi) = c\,A(\psi - B\psi)\,,$$

onde

$$\psi - c\,B(\psi) - c\,A(\psi) + c^2\,AB(\psi) = 0\,,$$

e, per la $AB=0$,

$$\psi - c\,(B+A)\psi = 0\,,$$

e c è numero invariante di $A+B$.

Il secondo teorema di Goursat equivale a ciò: se A, B sono operazioni ortogonali ed R, S sono le rispettive risolventi, $R+S$ è la risolvente di $A+B$.

Ciò risulta senz'altro dal fatto che da $AB=0$, $BA=0$, segue

$$(A+B)^n = A^n + B^n\,,$$

onde

$$\Sigma\, h^{n-1}\,(A+B)^n = \Sigma\, h^{n-1}\,A^n + \Sigma\, h^{n-1}\,B^n = R+S\,.$$

5. Ricordiamo che con operazione aggiunta di un'operazione lineare A s'intende una operazione $\bar{A}$ tale che. essendo $(\alpha\,,\beta)$ un'operazione separatamente lineare in α e β ed avente le proprietà del prodotto. sia, per ogni coppia $\alpha\,,\beta$,

$$(A(\alpha)\,,\beta) = (\alpha\,,\bar{A}(\beta))\,.$$

Da questa definizione risulta che l'aggiunta di AB è $\bar{B}\bar{A}$. Ne segue, per quanto risguarda l'ortogonalità, che se A e B sono ortogonali, lo sono pure le loro aggiunte; e se A e B hanno la semi-ortogonalità espressa da $AB=0$, $\bar{A}$ e $\bar{B}$ possiedono quella espressa da $\bar{B}\bar{A}=0$.

Chimica. — *Sulla esistenza di acque naturali oponizzate e probabili teorie del fenomeno. L'Acqua Forte delle Bagnare nel Monte Amiata.* Nota del Socio R. Nasini e di C. Porlezza.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.