ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Geologia. — *Affioramento di Titonico con* Diceras Luci *presso Parenzo in Istria.* Nota del Socio C. F. Parona.

Nell'esame di una collezione di fossili dei dintorni di Parenzo, fatta e gentilmente a me inviata dal sig. prof. Matteo Calegari del R. Istituto Tecnico di Milano, la mia attenzione si fermò specialmente sui fossili raccolti alla Punta di Fontane nell'isolotto di Riso, e scogli vicini, a sud di Parenzo. Sono *Diceras* e corollarî in un calcare tenero, bianco, in prevalenza oolitico: i primi, una decina di esemplari a valve riunite o separate, nel maggior numero corrispondono perfettamente per la forma esterna e per i caratteri della cerniera al *Diceras* (*Heterodiceras*) *Luci* Defr. (var. *communis* e var. *ovalis* Boehm [1]), ed i corollarî determinabili sono riferibili, a giudizio del dott. P. L. Prever, alle *Isastraea Thurmanni* Etall. e *Isastr. variabilis* Et. [2]. L'aspetto della roccia è affatto simile a quello del calcare oolitico a *Diceras* di Saint-Mihiel (Meuse), come mi risulta dal confronto con campioni di questa provenienza esistenti nel Museo di Torino. Con lo studio al microscopio delle sezioni sottili del calcare oolitico ho riconosciuto dei frustoli di alghe sifonee, che probabilmente appartengono alla *Tetraploporella Remesi* Steinm. [3], fossile, come il *Diceras* e le isastree, del calcare di Stramberg. Riscontrai inoltre una faunula a foraminiferi poco ricca di forme. A questo riguardo ricordo che i foraminiferi dell'orizzonte di Stramberg furono studiati dal Perner e dal Chapmann [4]: orbene la faunula istriana corrisponde meglio a quella descritta dal Perner, non avendo io riscontrato nelle poche sezioni esaminate le forme di *Ammodiscus* e di *Involutina*, che sono caratteristiche della fauna illustrata dal Chapmann. Sonvi *Cristellaria*, *Bulimina*, *Lituola*. *Haplophragrmium* e, abbastanza frequenti, diverse forme di textularidi.

Segnatamente il *Diceras Luci* e le isastree non lasciano dubbio sulla interpretazione di questo giacimento dell'isoletta di Riso come calcare coralligeno sincronizzabile col Titonico coralligeno di Stramberg.

L'interesse del rinvenimento sta nel fatto che finora sul litorale istriano era sconosciuto il Giurassico superiore. Taramelli, Stache, De Stefani, Schu-

(1) G. Boehm, *Die Bivalv. d. Stramberger Schicht.* (Pal. Mitth. a. d. Mus. d. K. Bayer. Staat., II Bd.) Cassel. 1883.

(2) M. M. Ogilvie, *Die Korallen di Stramb. Sch.* (Ibid.), Stuttgart, 1896-97.

(3) G. Steinmann, Tetraploporella Remeši, *eine neue Dasycladacea aus d. Tithon von Stramberg*, Beitr. z. Pal. u. Geol. Oesterr.-Ung. u. d. Orients, Bd. XV, 1903.

(4) J. Perner, *Ueb. d. Foraminif. aus d. Tithon von Stramberg*, Ac. d. Sc., Prague, V. Bull. Int. 1898; F. Chapman, *On some Foraminif. of Tithonian Age fr. the Stramberg*, ecc. The Journ. of the Linn. Soc. (Zoology), vol. 28, London, 1900.

bert [1] nei loro lavori riassuntivi sulla geologia della penisola d'Istria non accennano alla presenza dal Neogiurassico; così non risulta che delle potenti masse mesozoiche, assai estese a sud di Fiume, nella Croazia. Bosnia, Herzegovina e Montenegro, facciano parte dei calcari coralligeni a *Diceras*, per quanto non sia improbabile che effettivamente vi si trovino, in rapporto coi calcari bianchi con ellipsactinie della Herzegovina e del Lago di Scutari, così come si conoscono sul versante appenninico, nell'Abruzzo, dove a Calascio ed altrove affiorano calcari ad ellipsactinie con fauna titonica a coralli e molluschi, fra i quali un *Diceras* riferibile al *D. Luci* [2].

Ho ricordato la descrizione del Margraviato d'Istria del Taramelli, ma devo ancora ricordare che nella monografia dello stesso autore sul Lias nelle provincie venete [3] è espressa l'opportunità che siano meglio conosciuti e studiati alcuni banchi a nerinee da lui osservati presso la foce del fiume Quieto, a nord di Parenzo (punta Cervera) ed altri banchi contenenti dei piccoli *Diceras* nella dolomia creduta cretacea tra Dignano e Valle. Sarebbe infatti anche interessante di verificare la probabile corrispondenza di questi calcari con quelli pure a *Diceras* e a Nerinee della massa giurassica fra Gorizia e Istria, probabili equivalenti del livello di Stramberg [4]. Il Marinelli [5], trattando della serie giurese-cretacea con *facies* a camacee del Veneto orientale e dell'Istria e Dalmazia, accenna alla osservazione del Taramelli, notando che nel Litorale non furono riscontrate formazioni giuresi a *facies* corallina, aggiungendo giustamente che ciò del resto non esclude la loro esistenza, essendo in genere i calcari a camacee attribuiti alla Creta per il loro aspetto litologico, senza una minuta disamina dei fossili.

È dunque opportuna questa mia notizia a dimostrazione dell'esistenza nel litorale istriano del Neogiurassico, colla *facies* del calcare coralligeno titonico, riconosciuta per merito delle ricerche del prof. M. Calegari, al quale sono lieto di poter rinnovare i ringraziamenti per il dono fatto al Museo Geologico di Torino.

(1) T. Taramelli, *Descr. geogn. del Margraviato d'Istria*, Milano (Vallardi) 1878; E. Stache, *Die Liburn. Stufe*, ecc. Abhandl. d. k. k. geol. Reichs., Bd. XIII, 1889; C. De Stefani, *Géotect. des deux versants de l'Adriatique*, Annal. Soc. Géol. de Belgique, t. 33, Mém., 1908; R. Schubert, *Geol. Führer durch die Nordliche Adria*, Berlin (Gebrüdes Borntraeger), 1912.

(2) C. F. Parona, *Nuovi dati paleont. sui terr. mesoz. dell'Abruzzo*, Boll. R. Com. Geol., 1908; P. L. Prever, *Coralli giurassici del Gran Sasso d'Italia*. Atti R. Acc. Sc. Torino, vol. XLIV, 1909.

(3) T. Taramelli, *Monogr. strat. e paleont. del Lias nelle prov. venete*. Append. al Tomo V, ser. V, Atti R. Istit. Veneto, 1880.

(4) E. Stache, op. cit.

(5) O. Marinelli, *Descriz. geol. dei dint. di Tarcento in Friuli*. Pubbl. del R. Ist. Sup., Firenze, 1902.

Matematica. — *Ancora della integrazione delle equazioni del moto lento di un fluido viscoso.* Nota del dott. LUIGI AMOROSO, presentata dal Corrisp. G. LAURICELLA [1].

9. Sieno u_1, u_2, u_3, p quattro funzioni di Ω_1 che verificano al sistema (1). Poniamo:

$$k_j(x, y, z) = \left(\frac{\partial u_j(x, y, z, t)}{\partial t}\right)_{t=t_0} \qquad j = 1, 2, 3.$$

Dalle (1) deduciamo che

$$\Delta^2 u_1 - \frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad \Delta^2 u_2 - \frac{\partial u_2}{\partial t}, \quad \Delta^2 u_3 - \frac{\partial u_3}{\partial t}$$

sono entro S, per $t \geq t_0$, le derivate di una stessa funzione p armonica nelle variabili x, y, z. Per $t = t_0$, possiamo quindi scrivere

$$\Delta^2 h_1 - k_1 = \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \Delta^2 h_2 - k_2 = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \Delta^2 h_3 - k_3 = \frac{\partial \chi}{\partial z}$$

$\chi(x, y, z)$ essendo una funzione armonica.

Al contorno σ si ha, posto mente all'ultima delle (1)

$$\frac{\partial \chi}{\partial n} = (\Delta^2 h_1 - k_1) \cos nx + (\Delta^2 h_2 - k_2) \cos ny + (\Delta^3 h_3 - k_3) \cos nz =$$

$$= \left(\Delta^2 h_1 - \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\right)_{t=t_0}\right) \cos nx + \left(\Delta^2 h_2 - \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\right)_{t=t_0}\right) \cos ny +$$

$$+ \left(\Delta^2 h_3 - \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial t}\right)_{t=t_0}\right) \cos nz.$$

Concludiamo quindi: *Se* u_1, u_2, u_3, p *costituiscono una soluzione del sistema* (1), *appartenente ad* Ω_1, *allora* $\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, \frac{\partial u_3}{\partial t}$ *assumono, per* $t = t_0$, *i valori*:

$$k_1 = \Delta^2 h_1 - \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad k_2 = \Delta^2 h_2 - \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad k_3 = \Delta^2 h_3 - \frac{\partial \chi}{\partial z}, \tag{13}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1912.

χ *essendo la funzione armonica, la cui derivata normale prende al contorno* σ *i valori di*

$$\left(\Delta^2 h_1 - \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\right)_{t=t_0}\right) \cos nx + \left(\Delta^2 h_2 - \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\right)_{t=t_0}\right) \cos ny + \\ + \left(\Delta^2 h_3 - \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial t}\right)_{t=t_0}\right) \cos nz \text{ (1)}.$$

Consegue allora immediatamente: *Se* v_1, v_2, v_3, π, *sono funzioni di* Ω_1 *legate alle* u_1, u_2, u_3 *dalle* (7), *allora* v_1, v_2, v_3 *assumono per* $t = t_0$ *i valori*:

$$(14) \qquad v_j(x, y, z, t_0) = h_j(x, y, z) + \\ + \sum_{i=1}^{3} \int_S k_i(\xi, \eta, \zeta)\, G_{ij}(\xi, \eta, \zeta \mid x, y, z)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

le k_j *essendo definite dalle* (13).

10. Ciò posto, **riprendiamo le funzioni di** Ω_1: v_1, v_2, v_3 **che verificano al sistema** (9); **e dimostriamo che, se esistono tre funzioni di** Ω: w_1, w_2, w_3 **che verificano al sistema**

$$(15) \qquad w_j(x, y, z, t) + \sum_{i=1}^{3} \int_S \frac{\partial w_i(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} G_{ij}(\xi, \eta, \zeta \mid x, y, z)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \\ = \frac{\partial v_j(x, y, z, t)}{\partial t} \qquad j = 1, 2, 3,$$

ed assumono per $t = t_0$ **i valori di** k_1, k_2, k_3 **definiti dalle** (13), **al-**

(1) Si ha

$$\frac{\partial \Delta^2 h_1}{\partial x} + \frac{\partial \Delta^2 h_2}{\partial y} + \frac{\partial \Delta^2 h_3}{\partial z} = 0,$$

onde

$$\int_\sigma \left\{ (\Delta^2 h_1) \cos n\xi + (\Delta^2 h_2) \cos n\eta + (\Delta^2 h_3) \cos n\zeta \right\} d\sigma = 0;$$

questa equazione unitamente alla

$$\int_\sigma (\alpha_1 \cos n\xi + \alpha_2 \cos n\eta + \alpha_3 \cos n\zeta)\, d\sigma = 0,$$

valida per ipotesi per $t \geq t_0$ (vedi n. 1), fornisce immediatamente:

$$\int \left\{ \left(\Delta^2 h_1 - \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\right)_{t=t_0}\right) \cos n\xi + \left(\Delta^2 h_2 - \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\right)_{t=t_0}\right) \cos n\eta + \right. \\ \left. + \left(\Delta^2 h_3 - \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial t}\right)_{t=t_0}\right) \cos n\zeta \right\} d\sigma = 0.$$

lora esistono pure tre funzioni di Ω_1: u_1, u_2, u_3, che verificano al sistema

$$(7)\qquad u_j(x,y,z,t)+\sum_{i=1}^{3}\int_S \frac{\partial u_i(\xi,\eta,\zeta,t)}{\partial t}\,G_{ij}(\xi,\eta,\zeta\,|\,x,y,z)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \\ = v_j(x,y,z,t) \qquad j=1,2,3,$$

ed assumono per $t=t_0$ valori di h_1, h_2, h_3.

Precisamente le u_j si ottengono dalle w_j mediante le formule

$$(16)\qquad u_j(x,y,z,t)=h_j(x,y,z)+\int_{t_0}^{t} w_j(x,y,z,\tau)\,d\tau .$$

Infatti nell' ipotesi stabilita si ha da (15):

$$\int_{t_0}^{t} w_j(x,y,z,\tau)\,d\tau + \\ +\sum_{i=1}^{3}\int_S (w_j(\xi,\eta,\zeta,t)-k_j(\xi,\eta,\zeta))\,G_{ij}(\xi,\eta,\zeta|x,y,z)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \\ = v_j(x,y,z,t)-v_j(x,y,z,t_0),$$

da cui, posto mente alle (16):

$$u_j(x,y,z,t)-h_j(x,y,z)+ \\ +\sum_{i=1}^{3}\int_S \left(\frac{\partial u_i(\xi,\eta,\zeta,t)}{\partial t}-k_j(\xi,\eta,\zeta)\right)G_{ij}(\xi,\eta,\zeta|x,y,z)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \\ = v_j(x,y,z,t)-v_j(x,y,z,t_0),$$

e finalmente, tenuto conto delle (14), si deduce:

$$u_j(x,y,z,t)+\sum_{i=1}^{3}\int_S \frac{\partial u_i(\xi,\eta,\zeta)}{\partial t}\,G_{ij}(\xi,\eta,\zeta\,|\,x,y,z)\,d\xi d\eta d\zeta = \\ = v_j(x,y,z,t).$$

Le u_j definite dalle (16) *verificano quindi alle* (7), *ed assumono per $t=t_0$ i valori di h_j.*

Resta a dimostrare che le u_j *sono funzioni di Ω_1*: infatti, poichè le w_j sono, per ipotesi, funzioni di Ω, le u_j (cfr. le (16)) sono funzioni derivabili rispetto a t, colle derivate $\frac{\partial u_j}{\partial t}$, continue e limitate senza eccezione entro S, per $t \geq t_0$: inoltre dalle (7), ricordando che le G_{ij} sono funzioni analoghe a quelle di Green, e che le $\frac{\partial u_j}{\partial t}$ sono, come abbiamo visto or ora, continue e limitate entro S, risulta immediatamente che le u_j ammettono le derivate parziali dei primi due ordini rispetto a x, y, z e queste sono continue e limitate entro S per $t > t_0$, etc.

11. Tenendo presente quanto è stato detto al n. 8 risulta quindi che, perchè il problema enunciato al n. 1 sia completamente risoluto, basterà che si dimostri che *esistono tre funzioni di* Ω: w_1, w_2, w_3 *che verificano al sistema* (15) *ed assumono per* $t = t_0$ *i valori di* k_1, k_2, k_3.

Perciò mostreremo:

1) *Che al sistema* (15) *sono applicabili i risultati contenuti nella nostra citata Nota* E (*Estensione di alcuni precedenti risultati*).

2) *Che è soddisfatta la condizione, ivi stabilita, necessaria e sufficiente per l'esistenza della indicata soluzione.*

12. Cominciamo col dimostrare che *il sistema* (15) *rientra in quelli studiati nella nostra Nota* E, *ora ricordata.*

Infatti le $\dfrac{\partial v_j(x, y, z, t)}{\partial t}$ per $j = 1, 2, 3$ sono (cfr. la nota (2) al n. 8., pag. 507) funzioni di Ω_1, e quindi continue e limitate entro S, per $t \geq t_0$, derivabili rispetto a t, colle derivate $\dfrac{\partial^2 v_j}{\partial t^2}$ continue e limitate nello stesso campo.

Inoltre le

$$\int_S G_{ij}(x, y, z \,|\, \xi, \eta, \zeta)\, G_{ij}(\xi, \eta, \zeta \,|\, x^\star, y^\star, z^\star)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

costituiscono entro S funzioni continue e limitate di una coppia di punti in S, non tutte identicamente nulle. Se $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ è una funzione integrabile, insieme al suo quadrato, in senso di Lebesgue, nel campo S, le

$$\int_S \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, G_{ij}(\xi, \eta, \zeta \,|\, x, y, z)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

$$\int_S \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, G_{ij}(x, y, z \,|\, \xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

costituiscono funzioni di x, y, z continue e limitate entro S.

Infine sia λ_n una radice (semplice o multipla) del determinante di Fredholm, relativo al sistema dei nuclei $G_{ij}(\xi, \eta, \zeta \,|\, x, y, z)$: esisteranno allora tre funzioni $\psi_{1n}(x, y, z)$, $\psi_{2n}(x, y, z)$, $\psi_{3n}(x, y, z)$, che verificano al sistema:

$$(17) \quad \psi_{jn}(x, y, z) + \lambda_n \sum_{i=1}^{3} \int_S \psi_{in}(\xi, \eta, \zeta)\, G_{ij}(\xi, \eta, \zeta \,|\, x, y, z)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = 0$$
$$j = 1, 2, 3.$$

Dico che è $\lambda_n < 0$. Infatti, dalla (17), prendendo il Δ^2 da ambo i membri, posto mente alle solite (5), (6), si deduce

$$(18) \qquad \Delta^2\psi_{1n} - \lambda_1\psi_{1n} = \frac{\partial\varrho_n}{\partial x}, \quad \Delta^2\psi_{2n} - \lambda_2\psi_{2n} = \frac{\partial\varrho_n}{\partial y},$$
$$\Delta^2\psi_{3n} - \lambda_3\psi_{3n} = \frac{\partial\varrho_n}{\partial z}.$$

ove si è posto:

$$\varrho_n = -\sum_{i=1}^{3} \int_S \psi_{in}(\xi, \eta, \zeta)\, \gamma_i(\xi, \eta, \zeta \mid x, y, z)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\,.$$

D'altra parte dalle (17) si ha pure:

$$\left(\frac{\partial \psi_{1n}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{2n}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{3n}}{\partial z}\right) = -\lambda_n \sum_{i=1}^{3} \int_S \psi_{in} \left(\frac{\partial G_{i1}}{\partial x} + \frac{\partial G_{i2}}{\partial y} + \frac{\partial G_{i3}}{\partial z}\right) dS =$$

$$= -\frac{\lambda_n}{4\pi} \int_S \left(\psi_{1n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \psi_{2n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \psi_{3n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dS =$$

$$= \frac{\lambda_n}{4\pi} \int_S \left(\psi_{1n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \psi_{2n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + \psi_{3n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right) dS\,,$$

ovvero (poichè le ψ_{jn} sono nulle al contorno):

$$\frac{\partial \psi_{1n}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{2n}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{3n}}{\partial z} + \lambda_n \int_S \left(\frac{\partial \psi_{1n}}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_{2n}}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi_{3n}}{\partial \zeta}\right) \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{4\pi r} = 0\,.$$

Segue che o λ_n è una radice del determinante di Fredholm relativo al nucleo $\frac{1}{4\pi r}$ ed in tal caso è negativo $\left(\text{poichè } \frac{1}{4\pi r} \text{ è un nucleo } \textit{definito}\right)$, ovvero si ha

$$\frac{\partial \psi_{1n}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{2n}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{3n}}{\partial z} = 0\,. \tag{19}$$

Moltiplicando le tre (18) rispettivamente per $\psi_{1n}, \psi_{2n}, \psi_{3n}$, applicando il teorema di Gauss, tenuto conto della (19) e del fatto che le ψ_{jn} si annullano al contorno, si raccoglie:

$$\sum_{i=1}^{3} \int_S \left\{\left(\frac{\partial \psi_{in}}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_{in}}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_{in}}{\partial \zeta}\right)^3 + \lambda_n \psi_{in}^2\right\} dS = 0\,.$$

da cui, poichè le ψ_{jn} non sono tutte identicamente nulle, segue $\lambda_n < 0$.

Alle (15) possiamo quindi effettivamente applicare i risultati contenuti nella nostra Nota E.

13. *La condizione necessaria e sufficiente perchè esistano tre funzioni di* Ω, *che verifichino al sistema* (15), *ed inoltre assumano per* $t = t_0$ *i valori di* k_1, k_2, k_5 *è* (cfr. Nota E) *che sia risolubile il sistema integrale di prima specie,*

$$\sum_{i=1}^{3} \int_S \sigma_i(\xi, \eta, \zeta)\, G_{ij}(\xi, \eta, \zeta \mid x, y, z)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \tag{20}$$

$$= \left(\frac{\partial v_j(x, y, z, t)}{\partial t}\right)_{t=t_0} - k_j(x, y, z) \qquad j = 1, 2, 3,$$

le $\sigma_i(\xi, \eta, \zeta)$ essendo funzioni integrabili, insieme ai loro quadrati, in senso di Lebesgue, nel campo S.

Questa condizione è soddisfatta. Dico infatti che le funzioni $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, che si ottengono risolvendo il sistema di Fredholm

$$(21)\quad \begin{cases} \sigma_1(x, y, z) - \sum_{i=1}^{3} \int_S \sigma_i(\xi, \eta, \zeta) \dfrac{\partial \gamma_i(\xi, \eta, \zeta \mid x, y, z)}{\partial x} d\xi\, d\eta\, d\zeta = \\ \qquad\qquad = -\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \pi}{\partial t}\right)_{t=t_0} - \Delta^2 k_1\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

verificano anche al sistema (20), (π essendo insieme a v_1, v_2, v_3 la soluzione del sistema (9), appartenente ad Ω_1).

Proviamo anzitutto che il sistema (21) ammette soluzioni. Perciò si osservi che, detta μ_j, $j = 1, 2, 3$ una soluzione del sistema omogeneo

$$(22)\quad \mu_1 = \sum_{i=1}^{3} \int_S \mu_i \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} dS\,, \quad \mu_2 = \sum_{i=1}^{3} \int_S \mu_i \frac{\partial \gamma_2}{\partial x} dS\,, \quad \mu_3 = \sum_{i=1}^{3} \int_S \mu_i \frac{\partial \gamma_3}{\partial x} dS\,,$$

(poichè $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sono armoniche in x, y, z) μ_1, μ_2, μ_3 sono le derivate di una stessa funzione armonica ω, precisamente

$$(23)\quad \mu_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x}\,, \quad \mu_2 = \frac{\partial \omega}{\partial y}\,, \quad \mu_3 = \frac{\partial \omega}{\partial z}\,, \quad \omega = \sum_{i=1}^{3} \int_S \mu_i \gamma_i\, dS\,,$$

segue

$$(24)\quad \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + \frac{\partial \mu_2}{\partial y} + \frac{\partial \mu_3}{\partial z} = 0\,.$$

Posto allora

$$(25)\quad \nu_j = \sum_{i=1}^{3} \int_S \mu_i\, G_{ij}\, dS$$

si ha

$$\Delta^2 \nu_1 = -\mu_1 + \sum_{i=1}^{3} \int_S \mu_i\, \Delta^2 \Gamma_{i1}\, dS = -\mu_1 + \sum_{i=1}^{3} \int_S \mu_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial x} dS = 0\,,$$

e analogamente $\Delta^2 \nu_2 = 0$, $\Delta^2 \nu_3 = 0$. Ma ν_1, ν_2, ν_3 si annullano al contorno σ (vedi formula (25)), onde si ha identicamente $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$. Segue identicamente nei punti di S:

$$0 = \frac{\partial \nu_1}{\partial x} + \frac{\partial \nu_2}{\partial y} + \frac{\partial \nu_3}{\partial z} = \sum_{i=1}^{3} \int_S \mu_i \left(\frac{\partial G_{i1}}{\partial x} + \frac{\partial G_{i2}}{\partial y} + \frac{\partial G_{i3}}{\partial z}\right) dS$$

equazione che, tenute presenti le (5) (6), si scrive:

$$0 = \int\!\!\int_S \left(\mu_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mu_3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dS\,,$$

ed in forza del teorema di Gauss, tenute presenti le (24),

$$0 = \int_\sigma (\mu_1 \cos n\xi + \mu_2 \cos n\eta + \mu_3 \cos n\zeta) \frac{d\sigma}{r},$$

ovvero per le (23)

$$0 = \int_\sigma \frac{\partial \omega}{\partial n} \frac{d\sigma}{r},$$

ma il nucleo $\frac{1}{r}$ è chiuso sopra σ: si conclude allora che $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ è nullo sopra σ: onde, poichè ω è armonica in S, si raccoglie che ω resta costante entro tutto S, e quindi (vedi (23)) le μ_j sono nulle entro S. *Il sistema omogeneo* (22) *non ammette soluzioni non identicamente nulle: tanto basta per concludere che il* (21) *ammette una ed una sola soluzione* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Ciò posto poniamo

$$\varepsilon_j(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{3} \int_S \sigma_i(\xi, \eta, \zeta)\, G_{ij}(\xi, \eta, \zeta \,|\, x, y, z)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$
$$- \left(\left(\frac{\partial v_j(x, y, z, t)}{\partial t} \right)_{t=t_0} - k_j(x, y, z) \right) \qquad j = 1, 2, 3$$

avremo, tenute presenti le (5), (6), (9):

$$\Delta^2 \varepsilon_1 = -\sigma_1 + \sum_{i=1}^{3} \int_S \sigma_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial x}\, dS - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} \right)_{t=t_0} - \Delta^2 k_j \right),$$

e quindi per le (21), $\Delta^2 \varepsilon_1 = 0$. D'altra parte al contorno σ si ha $G_{i1} = 0$, ed inoltre ivi i valori di v_1 coincidono coi valori di u_1, per ogni $t \geq t_0$, onde si ha (cfr. formule 7):

$$\left(\frac{\partial v_1(x, y, z, t)}{\partial t} \right)_{t=t_0} = \left(\frac{\partial u_1(x, y, z, t)}{\partial t} \right)_{t=t_0} = k_1(x, y, z),$$

onde è pure al contorno $\varepsilon_1 = 0$, e quindi in tutto S: $\varepsilon_1 = 0$. Analogamente è $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ e ciò mostra che le σ_j verificano al sistema (20).

14. *Esistono quindi tre funzioni di* Ω: w_1, w_2, w_3 *che verificano al sistema* (15) *ed assumono per* $t = t_0$ *i valori di* k_1, k_2, k_3: *esse si calcolano mediante il procedimento indicato nella nostra Nota* E. Ciò prova che **le condizioni** (2) **sono effettivamente necessarie e sufficienti per l'esistenza di una soluzione di** (1) **appartenente a** Ω_1.

Per costruire tale soluzione si costruisce dapprima la soluzione v_1, v_2, v_3 *di* (9) *appartenente ad* Ω_1: *si risolve quindi il sistema* (15): *le* u_1, u_2, u_3 *definite dalle* (16) *sono allora funzioni di* Ω_1 *che verificano alle* (7): *unitamente alla p, definita dalla* (8), *rappresentano la soluzione di* (1), *appartenente ad* Ω_1.

Errata-corrige della Nota precedente: « Integrazione etc. » (Fasc. 8, 27 ottobre 1912).
Pag. 501 rigo 17 invece che *finite e continue*
» » » leggi *continue e limitate.*