ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Meccanica. — *Sopra le equazioni del moto generale e perturbato di un filo inestendibile.* Nota di MATTEO BOTTASSO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

In una recente Memoria, il sig. E. Terradas [2], partendo dalle equazioni stabilite dal Floquet [3] per il moto di un filo (inestendibile), ha ottenuto le equazioni a cui debbono soddisfare gli elementi del filo e del suo moto, quando questo risulta perturbato, riguardando la perturbazione come infinitesima del 1° ordine. In particolare, son dedotte le equazioni date dal Léauté [4] per le oscillazioni di una fune telodinamica, e possono ricavarsi quelle del Poisson, del Routh e del Maggi [5] per oscillazioni d'un filo in equilibrio.

Le equazioni parecchio complesse, ottenute dal Terradas per la intricata via cartesiana, vanno modificate, perchè due certi angoli (d'Eulero), considerati dal detto A. come infinitesimi, sono invece finiti.

Mostrerò qui, nei nn. 1, 2, 3, come si possano semplicemente ottenere sotto forma assoluta col calcolo vettoriale [6], oltre alle equazioni del Floquet, anche quelle (corrette) del Terradas. Quale esempio dei più notevoli casi particolari, considerati nel n. 4, si trova nel n. 5 l'equazione (a derivate parziali) da sostituirsi a quella inesatta data dal Terradas per le oscillazioni trasversali d'una fune di trasmissione. Per le oscillazioni longitudinali di tale fune si è espresso nel n. 6 lo spostamento del punto, e nel n°. 7 son state dedotte molto rapidamente le equazioni del Léauté.

EQUAZIONI ASSOLUTE DEL MOTO DI UN FILO INESTENDIBILE.

1. Consideriamo il punto $P(s, t)$ funzione delle variabili numeriche indipendenti s, t, essendo t il tempo; ed ogni linea $t = \text{cost}$ rappresenti

(1) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1912.

(2) *Del moviment pertorbat d'una corda*, Arxius de l'Inst. de Ciencies (Barcelona, a. 1911), pp. 71-96.

(3) *Sur le mouvement d'un fil dans l'espace*, C. R. de l'Ac. des Sciences, tom. 115 (Paris, 1892, 2° sem.), pp. 499-502.

(4) *Théorie générale des transmissions par câbles métalliques* (Paris, 1882).

(5) E. J. Routh, *Advanced part of a Treatise on the Dynamics*, etc. (London, 1892); G. A. Maggi, *Sul moto di un filo* ecc., Giornale di Battaglini, tom. XIX (1881).

(6) Limitandosi anzi ai principii di tale calcolo; così le equazioni cinematiche son dedotte semplicemente dalle formule di Frenet, analogamente a quanto è fatto nella mia Nota: *Alcune applicazioni delle formule di Frenet*, Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XLVII, 1911.

la posizione assunta al tempo t dal nostro filo. Potremo supporre che s sia l'arco della curva $t = \text{cost}$ per qualsiasi valore del tempo t, trattandosi di filo inestendibile.

Per la stessa curva $t = \text{cost}$, nel suo punto generico P, indichiamo con $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ la terna unitaria-ortogonale-destrogira di vettori diretti rispettivamente secondo la tangente, la normale principale, la binormale; con $r_1 = \varrho^{-1}$ la curvatura, e con $-p_1$ la torsione. Questi elementi sono legati fra loro dalle formole di Frenet [1]:

$$(1) \qquad \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = r_1 \mathbf{n} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} = p_1 \mathbf{b} - r_1 \mathbf{t} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} = -p_1 \mathbf{n} \,.$$

Se $\boldsymbol{\Omega}(s, t)$ indica un vettore tale che $\boldsymbol{\Omega}(s, t)\, dt$ rappresenti la rotazione (istantanea infinitesima), che porta la terna $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ relativa al punto $\mathrm{P}(s, t)$ a coincidere con l'analoga terna $\mathbf{t}^*, \mathbf{n}^*, \mathbf{b}^*$ relativa al punto $\mathrm{P}(s, t + dt)$, si avrà [2]:

$$(2) \qquad \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial t} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{t} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{n} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{b} \,.$$

Da queste derivando rispetto ad s, per le (1), si ha:

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} \mathbf{n} = \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial s} \wedge \mathbf{t} \quad , \quad -\frac{\partial p_1}{\partial t} \mathbf{n} = \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial s} \wedge \mathbf{b},$$

da cui segue subito:

$$(3) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial s} = \frac{\partial r_1}{\partial t} \mathbf{b} + \frac{\partial p_1}{\partial t} \mathbf{t} \,.$$

Indicando ancora, nel punto $\mathrm{P}(s, t)$ del filo, con $\mathbf{v}(s, t) = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t}$ la velocità assoluta, per essere $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial s}\right) = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial t}$, dalle (2) si ha:

$$(4) \qquad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial t} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{t} \,.$$

Questa e la (3) rappresentano, sotto forma assoluta, le *sei condizioni cinematiche* date dal Floquet (loc. cit.) per il moto di un filo. Le tre *equa-*

[1] Vedi, per es., C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Éléments de calcul vectoriel avec de nombreuses applications*, etc. (Paris, Hermann, 1910), 2e partie, ch. I, n. 2.

[2] Cfr. C. Burali-Forti et R. Marcolongo, loc. cit., 2e partie, ch. II, n. 3; od anche: R. Marcolongo, *Theoretische Mechanik*, Erster Band (Leipzig, Teubner, 1911), Fünftes Kap., pag 111.

zioni dinamiche dello stesso A. equivalgono alla semplice (ed ovvia, per il principio di D'Alembert) equazione assoluta ([1]):

$$(5)\qquad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{f} + \frac{1}{D}\frac{\partial(T\mathbf{t})}{\partial s},$$

essendo, sempre nel punto $P(s, t)$ del filo, $\mathbf{f}(s, t)$ la forza applicata (esterna) relativa all'unità di massa, $T(s, t)$ l'intensità della tensione, e D la densità (lineare), la quale ultima si supporrà costante.

Nelle complementari *condizioni geometriche* (1), (2), eliminando $\mathbf{n}$, si ha:

$$(6)\qquad \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = r_1 \mathbf{b}\wedge\mathbf{t}\ ,\quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} = -p_1 \mathbf{b}\wedge\mathbf{t}\quad ;\quad \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial t} = \Omega\wedge\mathbf{t}\ ,\quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \Omega\wedge\mathbf{b};$$

le quali con le (3), (4), (5) daranno tante equazioni, a derivate parziali, quante occorrono e bastano per determinare (con le debite condizioni iniziali ed ai limiti) $\Omega, \mathbf{v}, T, r_1, p_1, \mathbf{t}, \mathbf{b}$.

2. Dal detto sistema si hanno (in particolare) le *equazioni per il moto piano del filo*, quando, indicando la grandezza della velocità istantanea di rotazione con $r = \frac{\partial\theta}{\partial t}$ $\left(\text{e quindi } r_1 = \frac{\partial\theta}{\partial s}\right)$, si ponga:

$$(7)\qquad p_1 = 0\quad ,\quad \mathbf{b} = \text{cost}\quad ,\quad \Omega = r\mathbf{b} = \frac{\partial\theta}{\partial t}\mathbf{b};$$

tali equazioni, dovute al Résal, ridotte a forma assoluta, sono, con la (5):

$$(8)\qquad \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = r_1\mathbf{n}\ ,\quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} = -r_1\mathbf{t}\quad ;\quad \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} = r\mathbf{n}\ ,\quad \frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial r_1}{\partial t} = \frac{\partial^2\theta}{\partial t\,\partial s}.$$

Si ha invece il caso del *moto stazionario* di scorrimento del filo lungo una curva fissa, studiato dai sigg. Appell e Léauté, ponendo:

$$(9)\qquad \mathbf{v} = v\mathbf{t},\qquad \text{con } v \text{ funzione della sola } t;$$

se inoltre *questo moto stazionario è piano*, con le (8) si avrà:

$$(10)\qquad r = vr_1\quad ,\quad \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial s}\right)\mathbf{t} + r_1\left(v^2 - \frac{T}{D}\right)\mathbf{n} = \mathbf{f}.$$

Si hanno infine le *equazioni d'equilibrio* del filo, ponendo $\mathbf{v} = \Omega = 0$.

[1] Per riconoscere l'equivalenza della (5) con le equazioni dinamiche del Floquet si osserverà che, siccome $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ dipendono da t, il vettore le cui componenti sopra tale terna sono le derivate rispetto a t delle corrispondenti componenti di un dato vettore $\mathbf{v}(t)$, per le (2) è eguale a $\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\wedge\Omega$ (cfr. per esempio, Routh, loc. cit., P. II, Ch. I, nn. 1 a 5).

MOTO PERTURBATO DEL FILO.

3. Supponiamo ora che nell'istante generico t, per una perturbazione del moto, ognuna delle grandezze variabili dei nn. 1, 2, relativa al nostro filo, subisca una *variazione* che designeremo premettendo il simbolo δ alla grandezza considerata, e che riguarderemo come infinitesima del 1° ordine. È chiaro che per le grandezze così perturbate

$$\boldsymbol{\Omega}+\delta\boldsymbol{\Omega}\,,\ \mathbf{v}+\delta\mathbf{v}\,,\ \mathbf{f}+\delta\mathbf{f}\,,\ \mathrm{T}+\delta\mathrm{T}\,,\ r_1+\delta r_1\,,\ p_1+\delta p_1\,,$$
$$\mathbf{t}+\delta\mathbf{t}\,,\ \mathbf{n}+\delta\mathbf{n}\,,\ \mathbf{b}+\delta\mathbf{b}\,,$$

potranno scriversi delle equazioni affatto simili alle (1), ..., (5); e in forza di queste stesse equazioni, limitando l'approssimazione al 1° ordine, fra gli elementi $\delta\boldsymbol{\Omega}$, ..., $\delta\mathbf{b}$ della perturbazione, sussisteranno le seguenti equazioni:

$$(11)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial\delta\mathbf{t}}{\partial s}= \delta r_1.\mathbf{n}+r_1\delta\mathbf{n}\,, & \dfrac{\partial\delta\mathbf{t}}{\partial t}=\boldsymbol{\Omega}\wedge\delta\mathbf{t}-\mathbf{t}\wedge\delta\boldsymbol{\Omega}\,,\\[2ex] \dfrac{\partial\delta\mathbf{n}}{\partial s}= \delta p_1\,\mathbf{b}-\delta r_1.\mathbf{t}+p_1\delta\mathbf{b}-r_1\delta\mathbf{t}\,, & \dfrac{\partial\delta\mathbf{n}}{\partial t}=\boldsymbol{\Omega}\wedge\delta\mathbf{n}-\mathbf{n}\wedge\delta\boldsymbol{\Omega}\,,\\[2ex] \dfrac{\partial\delta\mathbf{b}}{\partial s}=-\delta p_1.\mathbf{n}-p_1\delta\mathbf{n}\,, & \dfrac{\partial\delta\mathbf{b}}{\partial t}=\boldsymbol{\Omega}\wedge\delta\mathbf{b}-\mathbf{b}\wedge\delta\boldsymbol{\Omega}\,,\end{cases}$$

$$(12)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial\delta\boldsymbol{\Omega}}{\partial s}=\dfrac{\partial\delta r_1}{\partial t}\mathbf{b}+\dfrac{\partial\delta p_1}{\partial t}\mathbf{t}+\dfrac{\partial r_1}{\partial t}\delta\mathbf{b}+\dfrac{\partial p_1}{\partial t}\delta\mathbf{t}\,,\\[2ex] \dfrac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial s}=\dfrac{\partial\delta\mathbf{t}}{\partial t}=\boldsymbol{\Omega}\wedge\delta\mathbf{t}-\mathbf{t}\wedge\delta\boldsymbol{\Omega}\,,\\[2ex] \dfrac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t}=\delta\mathbf{f}+\dfrac{1}{\mathrm{D}}\left[\dfrac{\partial\delta\mathrm{T}}{\partial s}\mathbf{t}+(r_1\delta\mathrm{T}+\mathrm{T}\delta r_1)\,\mathbf{n}+\dfrac{\partial\mathrm{T}}{\partial s}\delta\mathbf{t}+r_1\mathrm{T}\delta\mathbf{n}\right].\end{cases}$$

Giova osservare che, potendosi considerare δ come un simbolo di differenziazione, le (11) e (12) si possono senz'altro ottenere differenziando con δ le (1), ..., (5).

Le (12) corrispondono alle nove equazioni generali del sig. Terradas (loc. cit., pp. 76-77); le quali ultime però vanno tutte modificate, come si è detto, perchè degli angoli di Eulero θ', φ', ψ', là considerati e relativi alle due terne $\mathbf{n},\mathbf{b},\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}+\delta\mathbf{n}$, $\mathbf{b}+\delta\mathbf{b}$, $\mathbf{t}+\delta\mathbf{t}$, i due ultimi non sono infinitesimi, ma è tale solo la differenza dei loro moduli [1].

[1] Nelle stesse formule si riscontra (nella 1ª e nella 7ª) qualche dimenticanza, facile conseguenza della complicazione del metodo seguito per dedurle.

Casi particolari.

4. Quando il *moto primitivo* (non perturbato) è *piano*, basta introdurre le condizioni (7) nelle (11) e (12), oltrechè nelle (1), ..., (5).

Nell'ipotesi che *si conservi piano anche il moto perturbato*, devesi tener conto, con le (8), delle condizioni:

$$(7') \qquad \delta p_1 = 0 \quad , \quad \delta \mathbf{b} = 0 \quad , \quad \delta \Omega = \delta r . \mathbf{b} ;$$

ed allora, poichè $\mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}$, $\delta \mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \delta \mathbf{t}$, le (12) diventano:

$$(13) \qquad \frac{\partial \delta r}{\partial s} = \frac{\partial \delta r_1}{\partial t} \; , \; \frac{\partial \delta \mathbf{t}}{\partial t} = \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial s} = \delta (r \mathbf{n}) \; , \; \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} = \delta \mathbf{f} + \frac{1}{\mathrm{D}} \frac{\partial \delta (\mathrm{T} \mathbf{t})}{\partial s} ,$$

le cui due ultime equivalgono alle (3), (4) del Terradas (loc. cit., pag. 78).

Dalle espressioni di r ed r_1, applicando δ, si ha:

$$(14) \qquad \delta r = \frac{\partial \delta \theta}{\partial t} \quad , \quad \delta r_1 = \frac{\partial \delta \theta}{\partial s} ;$$

essendo inoltre $\delta \mathbf{t} = \mathbf{n} \times \delta \mathbf{t} . \mathbf{n}$, $\delta \mathbf{n} = - \mathbf{n} \times \delta \mathbf{t} . \mathbf{t}$, dalla 1ª delle (11), dalla 2ª delle (13), per le (8) e (14), si ricava:

$$\frac{\partial (\mathbf{n} \times \delta \mathbf{t})}{\partial s} = \frac{\partial \delta \theta}{\partial s} \quad , \quad \frac{\partial (\mathbf{n} \times \delta \mathbf{t})}{\partial t} = \frac{\partial \delta \theta}{\partial t} ,$$

da cui seguirà:

$$(15) \qquad \delta \mathbf{t} = \delta \theta . \mathbf{n} \quad , \quad \delta \mathbf{n} = - \delta \theta . \mathbf{t} .$$

Se il *moto primitivo è stazionario*, di scorrimento del filo lungo una linea fissa, occorre introdurre le condizioni (9) nelle (1), ..., (5) ed (11), (12); si dovrà in più tener conto, nelle stesse equazioni, delle (7), quando tal moto stazionario è *piano*: si hanno così sotto forma assoluta le (5), (6), (7) (debitamente corrette) del Terradas (loc. cit., pp. 79-80). Quando si supponga *stazionario e piano il moto primitivo* e che si *conservi piano il moto perturbato*, dovranno inoltre tenersi presenti le (7'); e con le (8), (10), (14), (15), si avrà:

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial s} = \frac{\partial \delta \mathbf{t}}{\partial t} = \frac{\partial \delta \theta}{\partial t} \mathbf{n} - r \delta \theta . \mathbf{t} , \\ & \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} = \delta \mathbf{f} + \frac{1}{\mathrm{D}} \left(\frac{\partial \delta \mathrm{T}}{\partial s} - r_1 \mathrm{T} \delta \theta \right) \mathbf{t} + \frac{1}{\mathrm{D}} \left(r_1 \delta \mathrm{T} + \mathrm{T} \frac{\partial \delta \theta}{\partial s} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial s} \delta \theta \right) \mathbf{n} . \end{aligned} \right.$$

Volendo limitarsi alla considerazione delle perturbazioni di un filo in equilibrio, basterà fare $\mathbf{v} = \Omega = 0$; se il filo giacesse inizialmente in un piano, si dovrebbe tener conto delle (7), e, per oscillazioni piane dello stesso filo, basterà porre $\mathbf{v} = \Omega = 0$ nelle (16).

ALCUNE APPLICAZIONI.

6. Consideriamo una *fune di trasmissione* del moto fra due puleggie (e sensibilmente *orizzontale*), la quale sia soggetta (nel tratto libero considerato) alla sola forza esterna di gravità; è il caso, per es., delle funi metalliche, che nei moderni impianti telodinamici s'impiegano per trasmettere dei lavori considerevoli anche a non lievi distanze.

Si supporranno *costanti* il raggio di curvatura $\varrho = r_1^{-1}$ (relativamente grande), la grandezza v della velocità del moto stazionario (piano) non perturbato e quindi anche r [ved. le (10)]; inoltre, per brevità di scrittura, poniamo $\mathrm{D} = 1$, cioè sostituiamo T a T/D.

È pure $\mathbf{f} = -g\mathbf{n}$, essendo g l'intensità dell'accelerazione dovuta alla gravità, poichè si riguarda la saetta come molto piccola, e $\delta\mathbf{f} = 0$ per l'assenza di forze esterne perturbatrici. Dalle (10) si ha poi:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial s} = 0 \quad , \quad g = r_1(\mathrm{T} - v^2) . \tag{17}$$

Si vogliano studiare le *perturbazioni trasversali* uscenti dal piano verticale della fune e dovute a difetti di centramento; dalle due ultime delle (12) e dalle prime due delle (11), moltiplicando scalarmente per $\mathbf{b}$ (che è costante), si ha:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial(\mathbf{b} \times \delta\mathbf{v})}{\partial s} = -\mathbf{n} \times \delta\Omega \quad , \quad \frac{\partial(\mathbf{b} \times \delta\mathbf{v})}{\partial t} = r_1 \mathrm{T}\mathbf{b} \times \delta\mathbf{n} , \\ &\frac{\partial(\mathbf{b} \times \delta\mathbf{t})}{\partial s} = r_1 \mathbf{b} \times \delta\mathbf{n} \quad , \quad \frac{\partial(\mathbf{b} \times \delta\mathbf{t})}{\partial t} = -\mathbf{n} \times \delta\Omega ; \end{aligned}\right. \tag{18}$$

da cui, per la 2ª delle (17):

$$\frac{\partial[\mathbf{b} \times (\delta\mathbf{v} - v\delta\mathbf{t})]}{\partial t} + v\,\frac{\partial[\mathbf{b} \times (\delta\mathbf{v} - v\delta\mathbf{t})]}{\partial s} = g\mathbf{b} \times \delta\mathbf{n} .$$

Derivando rispetto a t, dalla (4) delle (11), la 1ª delle (18) e delle (12), tenendo presenti le (7), le ipotesi di r, $r_1 = \varrho^{-1}$, v costanti, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\mathbf{b} \times \delta\mathbf{v})}{\partial t^2} + v\,\frac{\partial^2(\mathbf{b} \times \delta\mathbf{v})}{\partial s\,\partial t} - g\varrho\,\frac{\partial^2(\mathbf{b} \times \delta\mathbf{v})}{\partial s^2} &= \\ = v\,\frac{\partial^2(\mathbf{b} \times \delta\mathbf{t})}{\partial t^2} + v^2\,\frac{\partial^2(\mathbf{b} \times \delta\mathbf{t})}{\partial s\,\partial t} &, \end{aligned} \tag{19}$$

equazione che va sostituita alla 2ª di pag. 83 del Terradas (loc. cit.), dalla quale differisce, perchè contiene il 2° membro che, per la sua deduzione inesatta, il Terradas indica come nullo.

6. Supposto *infinitesimi* tanto r_1 (e perciò r) quanto $\mathbf{f} \times \mathbf{t} = \frac{\partial T}{\partial s}$ [vedi le (10)], con $\delta \mathbf{f} = 0$, $v = \text{cost}$, $D = 1$ nelle (16), si hanno le equazioni per le *perturbazioni longitudinali* (o piane) della fune del n. 5 sufficientemente tesa:

$$(20) \qquad \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial s} = \frac{\partial \delta \theta}{\partial t} \mathbf{n} \quad , \quad \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \delta T}{\partial t} \mathbf{t} + T \frac{\partial \delta \theta}{\partial s} \mathbf{n} .$$

Derivando, per le (8), si ottengono le equazioni:

$$(21) \qquad \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial s^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \delta T}{\partial s^2} = 0 ,$$

le quali, risolte, dànno:

$$\delta \theta = F_1(s + \sqrt{T}\, t) + F_2(s - \sqrt{T}\, t) \quad , \quad \delta T = s f_1'(t) + f_2(t) .$$

ove $T = \varrho g - v^2$ e le F_1, F_2, f_1', f_2 sono funzioni arbitrarie a determinarsi con le condizioni iniziali ed ai limiti; la $f_1'(t)$ si riterrà, per comodità, come derivata di una funzione $f_1(t)$. Dalle (23) si ricaverà allora:

$$\delta \mathbf{v} = f_1(t)\, \mathbf{t} + \sqrt{T} \left[F_1(s + \sqrt{T}\, t) - F_2(s - \sqrt{T}\, t) \right] \mathbf{n} ,$$

e poichè $\frac{\partial}{\partial t} \delta P = \delta \mathbf{v}$, $\frac{\partial}{\partial s} \delta P = \delta \mathbf{t} = \delta \theta \,.\, \mathbf{n}$, come *espressione dello spostamento del punto generico della fune* si avrà:

$$(22) \qquad \delta P = \left(\int f_1(t)\, dt \right) \mathbf{t} + \left(\int \delta \theta \, ds \right) \mathbf{n} ,$$

da sostituirsi alle espressioni di pag. 90 del Terradas per lo studio fatto, da questo A., delle vibrazioni del filo (in varie ipotesi) mediante la soluzione esponenziale della 1ª delle (21), dopo aver in questa posto $s = \sigma - vt$.

7. Le *perturbazioni longitudinali*, dovute, per le funi di trasmissione, ad irregolarità del lavoro motore e resistente, sono praticamente le più importanti negli impianti telodinamici. Per il *caso generale di tali perturbazioni* basta porre $\delta \mathbf{f} = 0$, $v = \text{cost}$, $D = 1$ nelle (16) per ottenere le equazioni che comprendono le (15), (16) del Terradas.

Introducendo l'ascissa curvilinea $\sigma = s + vt$ del punto mobile della fune a partire dall'origine degli archi s, ed indicando allora con f_σ la funzione di σ, t, che s'ottiene sostituendo $\sigma - vt$ al posto di s in una funzione $f_s = f(s, t)$, si ha:

$$(23) \qquad \frac{\partial f_s}{\partial s} = \frac{\partial f_\sigma}{\partial \sigma} \quad , \quad \frac{\partial f_s}{\partial t} = \frac{\partial f_\sigma}{\partial t} + v \frac{\partial f_\sigma}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial f_\sigma}{\partial \sigma} = \frac{\partial f_s}{\partial t} - v \frac{\partial f_s}{\partial s} .$$

Le (16) assumeranno quindi, nel caso in esame, la forma:

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial\sigma}=\frac{\partial\delta\mathbf{t}}{\partial t}+v\,\frac{\partial\delta\mathbf{t}}{\partial\sigma}=\left(\frac{\partial\delta\theta}{\partial t}+v\,\frac{\partial\delta\theta}{\partial\sigma}\right)\mathbf{n}-r\delta\theta.\mathbf{t}\,,\\ &\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t}=\left(\frac{\partial\delta\mathrm{T}}{\partial\sigma}-\frac{\mathrm{T}-v^2}{\varrho}\,\delta\theta\right)\mathbf{t}+\\ &\qquad+\left[(\mathrm{T}-v^2)\,\frac{\partial\delta\theta}{\partial\sigma}+\frac{\delta\mathrm{T}}{\varrho}+\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial\sigma}\,\delta\theta-v\,\frac{\partial\delta\theta}{\partial t}\right]\mathbf{n}\,,\end{aligned}\right.$$

ove per brevità, si è continuato ad indicare con $\delta\mathbf{v}\,,\ldots\,,$ le $(\delta\mathbf{v})_\sigma\,,\ldots$

Da queste equazioni si deducono molto rapidamente le equazioni del Léauté (loc. cit.) che il Terradas ricava dalle sue nelle pp. 76-78 (loc. cit.). Dette perciò $\alpha=\mathbf{t}\times\delta\mathrm{P}\ ,\ \beta=\mathbf{n}\times\delta\mathrm{P}$ le componenti tangenziale e normale dello spostamento $\delta\mathrm{P}$, per le (8), (15), (23) e per essere $\frac{\partial}{\partial\sigma}\,\delta\mathrm{P}=\delta\theta.\mathbf{n}$, si hanno subito le prime due equazioni del Léauté:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\sigma}=\frac{\partial(\mathbf{t}\times\delta\mathrm{P})}{\partial\sigma}=r_1\,\mathbf{n}\times\delta\mathrm{P}+\mathbf{t}\times\lambda\mathbf{t}=r_1\beta_1\quad,\quad\frac{\partial\beta}{\partial\sigma}=\delta\theta-r_1\,\alpha,$$

ossia:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\sigma}=\frac{\beta}{\varrho}\quad,\quad\frac{\partial\beta}{\partial\sigma}=\delta\theta-\frac{\alpha}{\varrho}\,.$$

Analogamente, poichè per le (24), (8) e (10) risulta essere:

$$\frac{\partial\mathbf{t}_\sigma}{\partial t}=\frac{\partial\mathbf{t}_s}{\partial t}-v\,\frac{\partial\mathbf{t}_s}{\partial s}=(r-vr_1)\,\mathbf{n}_s=0\quad,\quad\frac{\partial\mathbf{n}_\sigma}{\partial t}=0\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(\delta\mathrm{P})_\sigma=\frac{\partial}{\partial t}\,(\delta\mathrm{P})_s-v\,\frac{\partial}{\partial s}\,(\delta\mathrm{P})_s=\delta\mathbf{v}-v\,\delta\mathbf{t}\,,$$

dalle (8), (15), (24) stesse, riguardando sempre $\alpha\,,\beta\,,\ldots$ funzioni di $\sigma\,,t$, seguirà:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\mathbf{t}\times\delta\mathbf{v}\quad,\quad\frac{\partial\beta}{\partial t}=\mathbf{n}\times\delta\mathbf{v}-v\,\delta\theta\,,$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}=\mathbf{t}\times\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t}\quad,\quad\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2}=\mathbf{n}\times\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t}-v\,\frac{\partial\delta\theta}{\partial t}\;;$$

e per la 2ª delle (24) si hanno senz'altro le altre due equazioni del Léauté:

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}=\frac{\partial\delta\mathrm{T}}{\partial\sigma}+\frac{v^2-\mathrm{T}}{\varrho}\,\delta\theta\,,$$

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2}+v^2\,\frac{\partial\delta\theta}{\partial\sigma}+2v\,\frac{\partial\delta\theta}{\partial t}=\mathrm{T}\,\frac{\partial\delta\theta}{\partial\sigma}+\frac{\delta\mathrm{T}}{\varrho}+\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial\sigma}\,\delta\theta\,.$$