# ATTI
DELLA
# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XXI.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Matematica. — *Sopra le vibrazioni armoniche smorzate di un corpo elastico immerso in un fluido.* Nota di E. LAURA, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Derivate successive di una funzione di più variabili.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio E. D'OVIDIO [1].

Per rapidità di locuzione, noi diremo che una funzione gode *in generale* di una certa proprietà per dire che essa ne gode in ogni punto, escluso al più un aggregato di punti di misura nulla. Analogamente, quando diremo che un certo ente (punto, oppure retta $x = \text{cost}$, oppure retta $y = \text{cost}$, ecc.) è *generico*, intenderemo che gli enti esclusi formino un aggregato di misura nulla. Queste locuzioni abbreviano molti enunciati e dimostrazioni.

Il teorema, che dimostreremo e che senz'altro si estende a funzioni di $m > 2$ variabili, è il seguente:

*Sia $f(x, y)$ una funzione delle $x, y$; esistano per un qualche valore di $n$ le $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$ (e quindi anche le $\frac{\partial^m f}{\partial x^m}, \frac{\partial^m f}{\partial y^m}$ per $m \leq n$).*

*La $\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$ sia integrabile insieme al suo quadrato* [2] *e su una retta $x = \text{cost}$ generica l'integrale di $\frac{\partial^n f}{\partial y^n} dy$ relativo a un qualsiasi segmento, tutto interno al campo considerato, sia uguale alla differenza dei valori di $\frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}}$ negli estremi del segmento.*

*Una proprietà analoga valga per $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$.*

*Allora la funzione $f(x, y)$ possiede in punti generici tutte le derivate parziali di ordine $m \leq n$, soddisfacenti al teorema dell'invertibilità dell'ordine delle derivazioni, integrabili insieme al loro quadrato. E per esempio $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^{h+k} f}{\partial x^h \partial y^k} dx$ su una retta generica $y = \text{cost}$ $(h > 0$;*

[1] Pervenuta all'Accademia il 20 ottobre 1912.

[2] Da ciò segue già (cfr. la Nota dell'A.: *Sugli integrali multipli*, in questi Rendiconti 1907) che tali derivate sono linearmente integrabili su una retta generica $x = \text{cost}$ oppure $y = \text{cost}$.

*$h + k \leq n$) vale la differenza dei valori di* $\frac{\partial^{h+k-1} f}{\partial x^{h-1}\, \partial y^k}$ *nei punti* $(x_2, y)$ *e* $(x_1, y)$.

*Le derivate di ordine $n-2$ sono in ogni punto finite e continue; le derivate di ordine $n-1$ sono funzioni delle $x$ finite e continue su una retta $y = \text{cost}$ generica, funzioni della $y$ finite e continue su una $x = \text{cost}$ generica.*

Le ipotesi fatte sulle derivate di ordine $n$ sono già soddisfatte nel caso generalissimo in cui tali derivate sono limitate. Sia Q un quadrato interno al campo da noi studiato e limitato da rette generiche, che, senza diminuire la generalità, possiamo supporre essere le rette $x=0$, $x=\pi$, $y=0$, $y=\pi$. Tra le funzioni $\varphi(x,y)$, tali che sul contorno di Q la $\varphi$ e le $\frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m}$, $\frac{\partial^m \varphi}{\partial y^m}$ per $m \leq n-2$ assumano gli stessi valori della $f$ e derivate, che altrettanto avvenga *in generale* per $m = n-1$, che le derivate di ordine $m = n$ soddisfino entro Q alle stesse proprietà presupposte per le derivate analoghe della $f(x,y)$, scegliamone una che entro Q possegga [1] *tutte* le derivate parziali (di ordine anche maggiore di $n$) finite e continue. Noi sostituiremo [2], com' è lecito, allo studio della $f(x,y)$ quello della $v(x,y) = f(x,y) - \varphi(x,y)$, che soddisfa alle condizioni imposte dall' ipotesi del nostro teorema alla $f(x,y)$, che di più si annulla sul contorno di Q insieme alle $\frac{\partial^h v}{\partial x^h}$, $\frac{\partial^h v}{\partial y^h}$ per $h \leq n-2$, ed è tale che queste derivate si annullano nei punti generici del contorno di Q per $h = n-1$. Imporremo alla $v(x,y)$ le condizioni $v(-x,y) = -v(x,y)$, $v(x,-y) = -v(x,y)$, $v(x+2\pi, y) = v(x,y)$, $v(x, y+2\pi) = v(x,y)$ che ne definiranno il prolungamento in tutto il piano.

Potremo porre nel senso di Hurwitz entro il quadrato R definito dalle $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$:

$$v(x,y) \sim \sum a_{pq} \operatorname{sen} px \operatorname{sen} py\,; \tag{1}$$

[1] Basta scegliere p. es. quella $\varphi(x,y)$ per cui $\int\int_Q \left\{ \left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}\right)^2 + \left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n}\right)^2 \right\} dx\, dy$ ha il minimo valore (cfr. la Memoria dell'A. nei Rend. del Circolo Matem. di Palermo, tomo 23). Si potrebbero anche usare i metodi dati da E. Levi a pag. 79 e seg. della Mem.: *I problemi dei valori al contorno* ecc. » Mem. dei XL (1909). Così si potrebbe anzi ottenere che sul contorno di Q la $v(x,y)$ fosse nulla insieme alle derivate di ordine $m \leq n$.

[2] Se $n = 2$, si potrebbe più semplicemente porre

$$\psi(x,y) = f(x,y) + f(0,0) - f(0,y) - f(x,0),$$

e quindi

$$v(x,y) = \psi(x,y) - \frac{y}{\pi}\psi(x,\pi) - \frac{x}{\pi}\psi(\pi,y) + \frac{xy}{\pi^2}\psi(\pi,\pi).$$

dove la serie al 2° membro è *convergente in media*, e definisce la $v(x,y)$, eccettuato un aggregato di punti di misura nulla ed è integrabile [1] ter-

[1] Essendo $v(x,y)$ integrabile, per un teorema di Fatou è

$$\frac{1}{\pi^2}\int\int_{\mathrm{R}} v^2(x,y)\,dx\,dy = \Sigma a^2_{pq}\,.$$

La dimostrazione degli enunciati del testo (teorema di Fischer-Riesz) si compie semplicemente con un metodo da me già dato nella citata Memoria di Palermo. Poichè $\Sigma a^2_{pq}$ converge, sarà $\lim\limits_{n=\infty}\sum\limits_{p=n}^{\infty}\sum\limits_{q=n}^{\infty}{}' a^2_{pq}=0$. L'apice indica qui che nella sommatoria *almeno* uno degli indici $p,q$ appartiene all'intervallo corrispondente $(n,\infty)$. Posta questa sommatoria uguale a $\varrho_n$, potremo trovare degli interi crescenti $\varrho_{n_1},\varrho_{n_2},\ldots$ tali che $\sum\limits_i \varrho_{n_i}^{\frac{1}{3}}$ converga. Sàra

$$(\alpha)\qquad \int\int_{\mathrm{R}}\left\{\sum_{p,q=1}^{n_i+1} a_{pq}\,\mathrm{sen}\,px\,\mathrm{sen}\,qy-\sum_{p,q=1}^{n_i} a_{pq}\,\mathrm{sen}\,px\,\mathrm{sen}\,qy\right\}^2 dx\,dy \leq \pi^2\varrho_{n_i},$$

cosicchè il gruppo $\mathrm{G}_{n_i}$ di punti, ove la differenza tra $\{\ \}$ supera in valore assoluto la $\pi\,\varrho_{n_i}^{\frac{1}{3}}$ ha misura minore di $\varrho_{n_i}^{\frac{1}{3}}$. E l'aggregato $\Gamma_{n_h}=\mathrm{G}_{n_h}+\mathrm{G}_{n_{h+1}}+\mathrm{G}_{n_{h+2}}+\cdots$ ha misura inferiore a $\mathrm{R}_h=\varrho_{n_h}^{\frac{1}{3}}+\varrho_{n_{h+1}}^{\frac{1}{3}}+\varrho_{n_{h+2}}^{\frac{1}{3}}+\cdots$ Poichè $\Gamma_{n_h}$ contiene $\Gamma_{n_{h+1}}$, qualunque sia $h$, e poichè $\lim \mathrm{R}_h=0$, l'aggregato $\Gamma$ comune a tutti gli aggregati $\Gamma_{n_h}$ ha misura nulla; e in un punto non appartenente a $\Gamma$ è, *a partire da un valore della i abbastanza grande*

$$(\beta)\qquad \left|\sum_{p,q=1}^{n_{i+1}} a_{pq}\,\mathrm{sen}\,px\,\mathrm{sen}\,qy-\sum_{p,q=1}^{n_i} a_{pq}\,\mathrm{sen}\,px\,\mathrm{sen}\,qy\right| \leq \pi\varrho_{n_i}^{\frac{1}{3}}\,.$$

Se noi dunque nella serie del testo aggruppiamo i termini in guisa che

$$\sum_{p,q=1}^{n_i+1} a_{pq}\,\mathrm{sen}\,px\,\mathrm{sen}\,qy-\sum_{p,q=1}^{n_i} a_{pq}\,\mathrm{sen}\,px\,\mathrm{sen}\,qy$$

sia il termine generale della nuova serie ottenuta, questa, per l'ultima disuguaglianza, convergerà assolutamente in un punto generico, cioè non appartenente a $\Gamma$. Per ($\alpha$) e per la nota disuguaglianza di Schwarz la serie degli integrali dei valori assoluti dei termini di tale serie converge; e quindi la serie è integrabile termine a termine. Anzi la serie ottenuta integrando la (1), che noi sappiamo così convergere quando i termini sono agmine a termine. Così pure si potrà porre:

$$\frac{\partial^n v}{\partial x^n} \sim \sum b_{pq} \operatorname{sen} qy \begin{cases} \cos px \\ \operatorname{sen} px, \end{cases}$$

dove con la notazione qui adottata intendo che si deve scrivere $\cos px$ o

---

gruppati in modo conveniente, è senz'altro convergente nel senso più comune di tale parola. Infatti, se $n' > n$, $m' > m$, il resto di tale serie

$$\left| \iint_R \sum_{p=n}^{n'} \sum_{q=m}^{m'}{}' a_{pq} \operatorname{sen} px \operatorname{sen} qy \, dx\, dy \right| \leq$$

$$\leq \sqrt{\iint_R dx\, dy} \sqrt{\iint \left[ \sum_n^{n'} \sum_m^{m'}{}' a_{pq} \operatorname{sen} px \operatorname{sen} qy \right]^2 dx\, dy} \leq$$

$$\leq \sqrt{\iint_R dx\, dy \cdot \pi^2 \sum_n^{n'} \sum_m^{m'}{}' a_{pq}^2}$$

tende a zero per $n = \infty$, $m = \infty$.

La $v^2(x, y)$, essendo integrabile in R, è integrabile p. es. su una retta $y =$ cost generica; sulla quale varrà analogamente la

$$v(x, y) \sim \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p \operatorname{sen} px,$$

ove

$$\alpha_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(x, y) \operatorname{sen} px \, dx,$$

cosicchè

$$\alpha_p^2 \leq \frac{1}{\pi} \int v^2(x, y)\, dx,$$

ed è perciò integrabile rispetto alla $y$. Sarà così:

$$\alpha_p \sim \sum_q \beta_{pq} \operatorname{sen} qy,$$

e quindi

$$v(x, y) \sim \sum_p \left( \sum_q \beta_{pq} \operatorname{sen} qy \right) \operatorname{sen} px.$$

È poi:

$$a_{pq} = \frac{1}{\pi^2} \iint v(x, y) \operatorname{sen} px \operatorname{sen} qy \, dx\, dy = \frac{1}{\pi^2} \int \operatorname{sen} qy \, dy \int v(x, y) \operatorname{sen} px \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int \operatorname{sen} qy \, \alpha_p(y)\, dy = \beta_{pq}.$$

Se ne conclude dunque che la serie (1) del testo si può anche ordinare in una serie di Fourier della sola $x$ (o della sola $y$) ed anche in tal forma sarà analogamente integrabile termine a termine su una retta $y =$ cost (oppure $x =$ cost) generica.

Proprietà simili valgono per la serie, che si ottiene moltiplicando (1) per una funzione integrabile insieme al suo quadrato.

sen $px$, secondo che $n$ è dispari o pari, non escludendo per ora nel primo caso che $p$ possa anche ricevere valore nullo. Tale serie (cfr. Nota a piè di pagina) è integrabile termine a termine su una retta generica $y = \text{cost.}$ Sarà così:

$$\frac{\partial^{n-1} v}{\partial x^{n-1}} = \sum_{p=0}^{\infty} \left( \sum_q b_{pq} \operatorname{sen} qy \right) \int_0^x dx \begin{cases} \cos px \\ \operatorname{sen} px \end{cases} + \varphi(y),$$

dove $\varphi(y)$ è il valore del primo membro per $x = 0$, che già sappiamo generalmente nullo. Dalla

$$\left[ \sum_p \frac{1}{p} \left( \sum_q b_{pq} \operatorname{sen} qy \right) \right]^2 \leq \sum_p \frac{1}{p^2} \sum_p \left( \sum_q b_{pq} \operatorname{sen} qy \right)^2$$

si deduce che la serie al primo membro converge, cosicchè si avrà:

$$\frac{\partial^{n-1} v}{\partial x^{n-1}} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{p=1} \left( \sum_q b_{pq} \operatorname{sen} qy \right) \frac{\operatorname{sen} px}{p} + \varphi(y) + x \sum_q b_{0q} \operatorname{sen} qy \\ \hfill (n \text{ dispari}) \\ \displaystyle - \sum_p \left( \sum_q b_{pq} \operatorname{sen} qy \right) \frac{\cos px}{p} + \varphi(y) + \sum_p \frac{1}{p} \left( \sum_q b_{pq} \operatorname{sen} qy \right) \\ \hfill (n \text{ pari}). \end{cases}$$

Osservando che per ipotesi $\dfrac{\partial^{n-1} v}{\partial x^{n-1}}$ ammette il periodo $2\pi$, che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^{n-1} v}{\partial x^{n-1}} dx = 0,$$

si trova che la formola precedente si riduce alla:

$$\frac{\partial^{n-1} v}{\partial x^{n-1}} \sim \sum_p \left( \sum_q b_{pq} \operatorname{sen} qy \right) \frac{1}{p} \begin{cases} \operatorname{sen} px \\ -\cos px \end{cases} \qquad (p \neq 0).$$

Così continuando, si troverà:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \pm \sum_p \left( \sum_q b_{pq} \operatorname{sen} qy \right) \frac{1}{p^{n-1}} \cos px;$$

e quindi:

$$v = \int_0^x \frac{\partial v}{\partial x} dx = \pm \sum_p \left( \sum_q b_{pq} \operatorname{sen} qy \right) \frac{1}{p^n} \operatorname{sen} px.$$

I coefficienti $b_{pq}$ sono dunque uguali a $\pm p^n a_{pq}$; così i coefficienti dello sviluppo di $\dfrac{\partial^n v}{\partial y^n}$ saranno $\pm q^n a_{pq}$. Convergeranno dunque le serie $\sum (p^n a_{pq})^2$ e $\sum (q^n a_{pq})^2$; e, poichè $(p^h q^{m-h})^2 \leq p^{2n} + q^{2n}$ per $m \leq n$, $0 \leq h \leq m$, convergeranno anche le serie $\sum (a_{pq} p^h q^{m-h})^2$, ossia le

$$\sum_{p,q} (p^h q^k a_{pq})^2 \qquad (h + k \leq n \; ; \; h \,.\, k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Io dico che quindi convergono assolutamente ed uniformemente le serie

$$\sum_p p^h q^{m-h} a_{pq} \begin{cases} \text{sen}\, px \\ \cos px \end{cases} \begin{cases} \text{sen}\, qy \\ \cos qy \end{cases} \qquad (m \leq n-2),$$

dove è scritto indifferentemente il $\text{sen}\, px$ o $\cos px$, il $\text{sen}\, qy$ o $\cos qy$.

Infatti

$$\left(\sum_{p,q} \left| p^h q^{m-h} a_{pq} \begin{cases} \text{sen}\, px \\ \cos qx \end{cases} \begin{cases} \text{sen}\, qy \\ \cos qy \end{cases} \right| \right)^2 =$$

$$= \left( \sum_{p,q} \left| p^{h+1} q^{m-h+1} a_{pq} \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\, px}{p} \\ \dfrac{\cos px}{p} \end{cases} \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\, qy}{q} \\ \dfrac{\cos qy}{q} \end{cases} \right| \right)^2 \leq$$

$$\leq \sum_p \frac{1}{p^2} \sum_p \left( \sum_q p^{h+1} q^{m-h+1} a_{pq} \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\, qy}{q} \\ \dfrac{\cos qy}{q} \end{cases} \right)^2 \leq$$

$$\leq \sum_p \frac{1}{p^2} \sum_p \left[ \sum_q \frac{1}{q^2} \sum_q (p^{h+1} q^{m-h+1} a_{pq})^2 \right];$$

e la serie $\sum_{p,q} (p^{h+1} q^{m-h+1} a_{pq})^2$ dell'ultimo membro converge, perchè $h+1+$ $+m-h+1 = m+2 \leq n$ per ipotesi. Le nostre serie definiscono dunque funzioni continue, le quali saranno pertanto le derivate della $v$ di ordine $m \leq n-2$. Resta così provata una parte del nostro teorema. Per completare la dimostrazione consideriamo le serie per $m \leq n$

$$w = \sum p^h q^{m-h-2} a_{pq} \begin{cases} \text{sen}\, px \\ \cos px \end{cases} \begin{cases} \text{sen}\, qy \\ \cos qy \end{cases};$$

$$t \sim \sum p^{h+1} q^{m-h-1} a_{pq} \begin{cases} +\cos px \\ -\text{sen}\, px \end{cases} \begin{cases} +\cos qy \\ -\text{sen}\, qy, \end{cases}$$

dove nella seconda è scritto $\cos px$, se nella prima è scritto $\text{sen}\, px$, ecc.

La prima serie come ora si è dimostrato, definisce una funzione finita e continua; la seconda una funzione $t$ integrabile insieme a $t^2$, perchè converge la serie dei quadrati dei coefficienti (perchè $h+1+m-h-1 =$ $= m \leq n$). Sarà:

$$\int_0^x \int_0^y t\, dx\, dy = \sum p^{h+1} q^{m-h+1} a_{pq} \int_0^x dx \begin{cases} \cos px \\ -\text{sen}\, px \end{cases} \int_0^y dy \begin{cases} \cos qy \\ -\text{sen}\, qy \end{cases} =$$

$$= \sum p^{h+1} q^{m-h+1} a_{pq} \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\, px}{p} \\ \dfrac{\cos px}{p} - \dfrac{1}{p} \end{cases} \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\, qy}{q} \\ \dfrac{\cos qy}{q} - \dfrac{1}{q}. \end{cases}$$

Poichè anche le serie che si deducono dalla $w(x,y)$ ponendo 1 in luogo di $\begin{cases}\operatorname{sen} px \\ \cos px\end{cases}$ o di $\begin{cases}\operatorname{sen} qy \\ \cos qy\end{cases}$ o di entrambe sono convergenti, se ne deduce immediatamente:

$$\int_0^x \int_0^y t\,dx\,dy = w(x,y) + \mathrm{X} + \mathrm{Y},$$

dove X è funzione della sola $x$, Y della sola $y$. Tanto basta per affermare che in generale $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = t$; dal che si deduce immediatamente che le serie dedotte dalla $\sum a_{pq} \operatorname{sen} px \operatorname{sen} qy$ derivando non più di $n$ volte rispetto alla $x$, od alla $y$ rappresentano effettivamente le corrispondenti derivate parziali di $v(x,y)$. c. d. d.

Riassumendo le derivate di ordine $m = n$ sono date dalle $t(x,y)$, ove si ponga $m = n$ ed esistono generalmente; le derivate di ordine $n - 1$ se ne ottengono integrando, e sono finite e continue su una retta generica; le derivate di ordine $m \leq n - 2$ sono dappertutto finite e continue.

## Meccanica. — *Sui moti stazionarii nel caso della Kowalevsky.* Nota della sig.na Clelia Silvestri, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

In una Nota recente [2] ho rilevato che, per completare le ricerche del Levi-Civita sui moti stazionarii nel caso della Kowalevsky, rimanevano da precisare le condizioni di stabilità per due tipi, chiamati *a*) e *b*), costituiti ciascuno da $\infty^2$ soluzioni particolari, e provenienti, rispettivamente, dal solo integrale delle aree e dal solo integrale della Kowalevsky (rimanendo esaurita la classe più ampia che sfrutta entrambi gli integrali ad un tempo).

In questa prima Nota, dovrò (per ragioni di spazio) limitarmi allo studio del tipo *a*). Col permesso dell'Accademia esporrò, in una Nota successiva, quanto si attiene al caso *b*).

1. *Moti provenienti dall'integrale delle aree.* — La funzione caratteristica del sistema canonico che definisce il moto di un solido nel caso della Kowalevsky può scriversi sotto la forma:

$$\mathrm{H} = \frac{1}{4}\left\{ p_\vartheta^2 + \frac{\operatorname{sen}^2\vartheta}{\cos^2\vartheta}\, p_f^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\vartheta}\, p_\varphi^2 + \frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}^2\vartheta}\, p_f\, p_\varphi \right\} + \frac{1}{2}\, p_f^2 - \operatorname{sen}\vartheta \cos f.$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 21 ottobre 1912.

[2] Cfr. precedente fascicolo di questi stessi Rendiconti.