ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Poichè anche le serie che si deducono dalla $w(x,y)$ ponendo 1 in luogo di $\begin{cases}\text{sen}\, px \\ \cos px\end{cases}$ o di $\begin{cases}\text{sen}\, qy \\ \cos qy\end{cases}$ o di entrambe sono convergenti, se ne deduce immediatamente:

$$\int_0^x \int_0^y t\, dx\, dy = w(x,y) + \mathrm{X} + \mathrm{Y},$$

dove X è funzione della sola x, Y della sola y. Tanto basta per affermare che in generale $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} = t$; dal che si deduce immediatamente che le serie dedotte dalla $\sum a_{pq}\, \text{sen}\, px\, \text{sen}\, qy$ derivando non più di n volte rispetto alla x, od alla y rappresentano effettivamente le corrispondenti derivate parziali di $v(x,y)$. c. d. d.

Riassumendo le derivate di ordine $m = n$ sono date dalle $t(x,y)$, ove si ponga $m = n$ ed esistono generalmente; le derivate di ordine $n-1$ se ne ottengono integrando, e sono finite e continue su una retta generica; le derivate di ordine $m \leq n-2$ sono dappertutto finite e continue.

Meccanica. — *Sui moti stazionarii nel caso della Kowalevsky.* Nota della sig.na Clelia Silvestri, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

In una Nota recente [2] ho rilevato che, per completare le ricerche del Levi-Civita sui moti stazionarii nel caso della Kowalevsky, rimanevano da precisare le condizioni di stabilità per due tipi, chiamati *a*) e *b*), costituiti ciascuno da ∞^2 soluzioni particolari, e provenienti, rispettivamente, dal solo integrale delle aree e dal solo integrale della Kowalevsky (rimanendo esaurita la classe più ampia che sfrutta entrambi gli integrali ad un tempo).

In questa prima Nota, dovrò (per ragioni di spazio) limitarmi allo studio del tipo *a*). Col permesso dell'Accademia esporrò, in una Nota successiva, quanto si attiene al caso *b*).

1. *Moti provenienti dall'integrale delle aree.* — La funzione caratteristica del sistema canonico che definisce il moto di un solido nel caso della Kowalevsky può scriversi sotto la forma:

$$\mathrm{H} = \frac{1}{4}\left\{ p_\vartheta^2 + \frac{\text{sen}^2\vartheta}{\cos^2\vartheta}\, p_f^2 + \frac{1}{\text{sen}^2\vartheta}\, p_\varphi^2 + \frac{\cos\vartheta}{\text{sen}^2\vartheta}\, p_f\, p_\varphi \right\} + \frac{1}{2}\, p_f^2 - \text{sen}\,\vartheta \cos f.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 21 ottobre 1912.

(2) Cfr. precedente fascicolo di questi stessi Rendiconti.

dove ϑ, f, φ, designano (colla notazione di Kirchhoff) gli angoli di Eulero; $p_\vartheta, p_f, p_\varphi$, le relative variabili coniugate [1].

L'integrale delle aree, in queste variabili canoniche, assume notoriamente la forma

$$p_\varphi = c, \qquad (c \text{ costante}).$$

I moti stazionarii provenienti da tale integrale si ottengono (secondo la regola di Routh-Levi-Civita) esprimendo che in siffatta accezione, è nullo il differenziale δH. Ciò esige che sia:

$$a_1) \qquad p_\vartheta = 0 \ , \ p_f = 0 \quad ; \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} \ , \ f = 0 \ ;$$

ovvero

$$a_2) \qquad p_\vartheta = 0 \ , \ p_f = 0 \quad ; \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} \ , \ f = \pi \ ;$$

o infine

$$a_3) \qquad p_\vartheta = 0 \ , \ p_f = p_f^0 \quad ; \quad \vartheta = \vartheta_0 \ , \ f = \pi ;$$

essendo ϑ_0 e p_f^0 definiti, rispettivamente, da

$$(1) \qquad \frac{c^2 \operatorname{sen} \vartheta_0}{(1 + \operatorname{sen}^2 \vartheta_0)^2} = 1 \, ,$$

$$(2) \qquad p_f^0(1 + \operatorname{sen}^2 \vartheta_0) + c \cos \vartheta_0 = 0 \, .$$

In tutti e tre i casi si tratta, come facilmente si riconosce, e come, del resto, è ben noto, di rotazioni uniformi del solido attorno alla verticale. Nel corpo stesso l'asse di rotazione coincide coll'asse baricentrico nei casi a_1) ed a_2); e per conseguenza il centro di gravità rimane fisso. Nel caso a_3) l'asse suddetto può trovarsi diretto, entro il solido, secondo un qualsiasi diametro di quel piano meridiano dell'ellissoide d'inerzia che contiene il baricentro.

2. *Rotazione a baricentro fisso.* — Il centro di gravità H giace sulla verticale che passa per il punto fisso O, al disotto di questo nel caso a_1), al disopra nel caso a_2).

Se ci si lasciasse guidare dal criterio puramente statico di stabilità si sarebbe indotti a ritenere stabile il caso a_1) ed instabile il caso a_2) ed è ciò che ha trovato il Levi-Civita applicando materialmente la regola di Dirichlet-Liapounoff. Ma le limitazioni ad essa imposte [2] ne assicurano la

[1] Per maggior semplicità ho posto eguale ad 1 la costante di omogeneità che il Levi-Civita designa con s^2, ciò che può sempre farsi (senza scapito delle generalità) bastando all'uopo imaginare scelta l'unità di tempo in modo opportuno.

[2] Cfr. la mia Nota, loc. cit.

validità, in tal caso, solo per quanto concerne il criterio di stabilità. Rimane, quindi, fuori di discussione la circostanza, già rilevata dal Levi-Civita che il caso a_1) è stabile; mentre conviene ricorrere alle piccole oscillazioni per riconoscere il comportamento del caso a_2).

Ponendo:

$$\vartheta^* = \vartheta - \frac{\pi}{2} \quad , \quad f^* = f - \pi\,;$$

e limitando l'espressione di H ai termini di second'ordine, rispetto ai quattro argomenti $p_\vartheta, p_f, \vartheta, f$, si ha:

$$H_3 = \frac{1}{4}\left\{ p_\vartheta^2 + 2p_f^2 + (c^2-2)\,\vartheta^{*2} - 2f^{*2} - 2c\vartheta^* p_f \right\}.$$

Le equazioni che definiscono il moto [nell' intorno della particolare soluzione a_2)] sono in conformità:

$$\frac{dp_\vartheta}{dt} = \frac{1}{2}(c^2-2)\,\vartheta^* + \frac{1}{2}c\,p_f \quad , \quad \frac{dp_f}{dt} = f^*\,;$$

$$\frac{d\vartheta^*}{dt} = \frac{1}{2}p_\vartheta\,, \qquad \frac{df^*}{dt} = p_f - \frac{1}{2}c\,\vartheta^*.$$

La relativa equazione determinante è:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2}c & \frac{1}{2}(c^2-2) & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & & -\frac{1}{2}c & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + 2\,D'\lambda + D = 0\,,$$

dove

$$D' = \frac{1}{8}(c^2-6)\,,$$

$$D = \frac{1}{8}(4-c^2)\,.$$

È chiaro che D e D' non possono essere entrambe positive, perchè le due diseguaglianze,

$$c^2 > 6 \quad , \quad c^2 < 4$$

non possono coesistere. Ne consegue che le radici λ^2 della equazione determinante non sono tutte e due negative e quindi si ha instabilità.

Si giunge così precisamente alla conclusione indicata dal prof. Levi-Civita, conforme al criterio statico. Non era tuttavia evidente, *a priori*, che si dovesse ritrovarlo, potendosi eventualmente pensare che si presentasse un fenomeno analogo a quello ben noto della trottola in cui, pur giacendo, il baricentro sopra il punto di appoggio, si ha stabilità con una rotazione abbastanza forte.

3. *Rotazioni a baricentro mobile.* — Introducendo una variabile ausiliaria

$$\varepsilon = \frac{(1+\operatorname{sen}^2\vartheta)\, p_f + c\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\vartheta}},$$

la H, fattavi $p_\varphi = c$, può essere scritta:

$$\mathrm{H} = \frac{1}{4}(p_\vartheta^2 + \varepsilon^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{1+\operatorname{sen}^2\vartheta} - 2\operatorname{sen}\vartheta\cos f\right).$$

Posto ancora

$$p_f - p_f^0 = p_f^\star \quad , \quad \vartheta - \vartheta_0 = \vartheta^\star \quad , \quad f - \pi = f^\star,$$

si sviluppi H nell'intorno dei valori nulli di p_ϑ, $p_f^\star$, $\vartheta^\star$, $f^\star$. Con calcoli semplici si trova subito, in base alle (1), (2),

(3) $$\mathrm{H}_2 = \frac{1}{4}\{p_\vartheta^2 - \nu\vartheta^{\star 2} + \varepsilon^{\star 2}\} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\vartheta_0\, f^{\star 2},$$

dove

(4) $$\nu = \frac{2}{\operatorname{sen}\vartheta_0}\,\frac{\cos^2\vartheta_0(1-3\operatorname{sen}^3\vartheta_0)}{1+\operatorname{sen}^2\vartheta_0}$$

ed $\varepsilon^\star$, il quale non è altro che la parte di primo ordine della precedente espressione di ε, è dato da:

$$a p_f^\star + b\vartheta^\star,$$

essendo

$$a = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p_f}\right)_{p_f = p_f^0,\ \vartheta=\vartheta_0} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\vartheta_0}}{\operatorname{sen}\vartheta_0}$$

e

$$b = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\vartheta}\right)_{p_f = p_f^0,\ \vartheta=\vartheta_0} = \pm\frac{2+\cos^2\vartheta}{\sqrt{\operatorname{sen}\vartheta_0(1+\operatorname{sen}^2\vartheta_0)}}.$$

Le equazioni che definiscono le piccole oscillazioni sono (in base all'espressione (3) di H_2 e ricordando che $\varepsilon^\star$ sta a designare $a p_f^\star + b\vartheta^\star$):

(5) $$\begin{cases} \dfrac{dp_\vartheta}{dt} = \dfrac{1}{2}\nu\vartheta^\star - \dfrac{1}{2}b\varepsilon^\star \quad , & \dfrac{dp_f^\star}{dt} = \operatorname{sen}\vartheta_0\, f^\star, \\[2ex] \dfrac{d\vartheta^\star}{dt} = \dfrac{1}{2}p_\vartheta, & \dfrac{df^\star}{dt} = \dfrac{1}{2}a\varepsilon^\star. \end{cases}$$

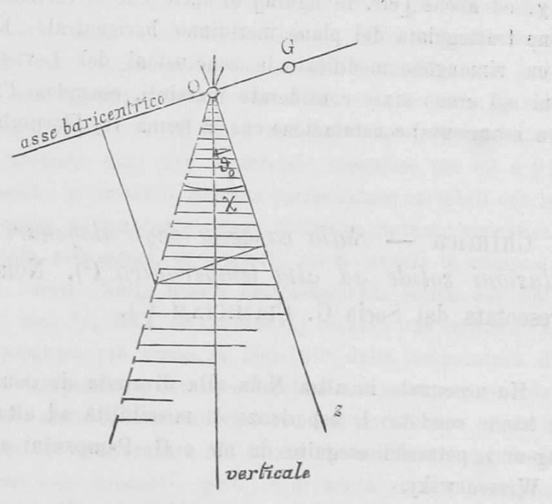
Ora nel sistema (5) dapprima sostituisco alla $\frac{dp_f^\star}{dt}$ la

$$\frac{d\varepsilon^\star}{dt} = a \operatorname{sen} \vartheta_0 f^\star + \frac{1}{2} b\, p_z ,$$

eppoi derivo ulteriormente le equazioni in $\vartheta^\star$ ed $\varepsilon^\star$, con che vengono eliminati gli altri due argomenti p_z ed $f^\star$, ottenendo così l'equivalente sistema di second'ordine:

$$\frac{d^2\vartheta^\star}{dt^2} = \frac{1}{4} \nu \vartheta^\star - \frac{1}{4} b\, \varepsilon^\star ,$$

$$\frac{d^2\varepsilon^\star}{dt^2} = \frac{1}{4} b \nu \vartheta^\star + \left\{ \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} \vartheta_0 - \frac{1}{4} b^2 \right\} \varepsilon^\star .$$



La relativa equazione determinante [notoriamente identica a quella spettante al sistema canonico (5)] è:

$$\lambda^4 + \left\{ \frac{1}{4} (b^2 - \nu) - \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} \vartheta_0 \right\} \lambda^2 + \frac{1}{8} a^2 \operatorname{sen} \vartheta_0 \nu = 0 .$$

Per ν negativo, non tutte le radici possono essere puramente imaginarie: c'è quindi instabilità. Viceversa, è facile di accertare che per $\nu > 0$ le condizioni di stabilità sono effettivamente soddisfatte. Dalla (4) apparisce che ν è positivo o negativo secondo che $\operatorname{sen}^2 \vartheta^0$ è $> \frac{1}{3}$ oppure $< \frac{1}{3}$. Tale è pertanto la discriminante della stabilità.

Per l'interpretazione geometrico-cinematica conviene ricordare:

1°) che ϑ rappresenta l'angolo fra la verticale e l'asse di simmetria (od asse polare) Oz dell'ellissoide d'inerzia del corpo;

2°) che i semiassi polare ed equatoriale, di tale ellissoide, stanno fra loro come $1:\frac{1}{\sqrt{2}}$, talchè la diagonale del rettangolo costituito sopra di essi forma col semiasse Oz un angolo χ avente per seno $\frac{1}{\sqrt{3}}$;

3°) che nella rotazione in questione la verticale è diretta, rispetto al corpo, secondo un diametro del piano meridiano baricentrale zOG, giacendo il baricentro G al disopra di O [1].

Da tuttociò si raccoglie che la condizione di stabilità $\operatorname{sen}^2 \vartheta_0 < \frac{1}{3}$ equivale al fatto geometrico che l'inclinazione di Oz sulla verticale è minore di χ, od anche [cfr. la figura] al fatto che la verticale appartiene alla regione tratteggiata del piano meridiano baricentrale. È questo l'unico caso in cui rimangono modificate le conclusioni del Levi-Civita. Tutte le rotazioni a_3) erano state considerate instabili, essendosi l'Autore riportato alla (non esauriente) constatazione che la forma H_2 [formula (3)] non è definita.

Chimica — *Sulla capacità degli alogenuri potassici di dare soluzioni solide ad alta temperatura* [2]. Nota di M. Amadori, presentata dal Socio G. Ciamiciam [3].

Ho accennato in altra Nota alla diversità di risultati e di conclusioni cui hanno condotto le esperienze di miscibilità ad alta temperatura tra gli alogenuri potassici eseguite da me e G. Pampanini e contemporaneamente da Wrzesnewsky.

Le nostre ricerche sono state pubblicate nello scorso novembre in questi Rendiconti [4]; quelle di Wrzesnewsky nel Journ. Russ. Phys.-Chem. Ges. [5] e più tardi nella Zeit. f. anorg. Chemie [6].

Riassumo brevemente i risultati ottenuti.

Le esperienze di Wrzesnewsky e le nostre per le due coppie *cloruro-bromuro* e *bromuro-ioduro* portano alla conclusione concorde che la solubilità tra i due sali allo stato solido a temperatura elevata è completa, però le temperature di solidificazione delle miscele saline risultano molto diverse:

(1) Cfr. Levi-Civita, Rend. Acc. Lincei, vol. X, pag. 342, anno 1901.
(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova, diretto dal prof. G. Bruni.
(3) Pervenuta all'Accademia il 25 agosto 1912.
(4) Questi Rendiconti, vol. XX, 2° sem., pag. 572, 1911.
(5) Journ. Russ. Chem. Ges., *41*, 1382; C. B. 1912, 1° sem., pag. 464.
(6) Zeit. f. anorg. Chemie, *74*, 95, 1912.