

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Spigoli misurati	Angoli osservati			Angoli calcolati
	N.	Limiti	Medie	
(100):(010)	12	72° 34' — 73° 0'	72° 46' $\frac{1}{2}$	*
(100):(001)	3	67 29 — 67 47	67 39	*
(001):(010)	8	113 11 — 113 32	113 18	*
($\bar{1}11$):($\bar{1}00$)	4	46 17 — 46 53	46 38	*
($\bar{1}11$):(010)	7	80 22 — 80 51	80 37	*
($\bar{1}11$):(001)	4	89 58 — 90 22	90 6	89° 52'

Sulla faccia (010), che a luce convergente produce una figura d'interferenza biassica alquanto confusa, a luce bianca parallela una direzione di estinzione fa circa 5° con l'asse ε nell'angolo β acuto.

Zoologia. — *Risultato di esperimenti fatti sopra alcune anguille argentine vissute forzatamente in acqua dolce.* Nota del prof. F. MAZZA, presentata dal Socio B. GRASSI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica celeste. — *Prime conseguenze d'una recente teoria della gravitazione.* Nota di G. PAVANINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA (¹).

1. In una recente ricerca il sig. Abraham (²) propone una nuova teoria della gravitazione suggerita dal principio di relatività. Egli giunge ad una relazione fra il potenziale gravitazionale e la velocità della luce che s'accorda, in prima approssimazione, con l'analoga relazione ricavata dal sig. Einstein (³).

Per ciò che concerne il problema dei due corpi, già si trovano nel lavoro dell'Abraham le equazioni rigorose, che sono differenziali di secondo ordine, ma hanno, come ben si sa, carattere funzionale, dipendendo da stati di moto anteriore a quello cui si riferiscono le accelerazioni dei due corpi.

(¹) Pervenuta all'Accademia il 9 ottobre 1912.

(²) *Sulla teoria della gravitazione*, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, vol. XX. 2° sem. 1911; e vol. XXI, 1° sem. 1912.

(³) Cfr. *Annalen der Physik*. 35, 1911.

Nella presente Nota mi propongo di dedurre delle equazioni approssimate fino al secondo ordine (rispetto al rapporto fra la velocità dei corpi e quella di propagazione della luce), le quali sieno esenti da complicazioni funzionali, e mettano bene in evidenza quanto c'è di diverso dal caso limite ordinario di una propagazione istantanea.

Avrò l'onore di comunicare all'Accademia in una prossima Nota le conseguenze salienti cui si perviene trattando il problema (dopo averlo così semplificato) col metodo classico della teoria delle perturbazioni.

2. *Espressione del potenziale.* — Due corpi che designeremo, come le loro masse, con m_0 ed m , occupino in un generico istante t (tempo assoluto, secondo l'accezione ordinaria) le posizioni $P_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$, $P(\xi, \eta, \zeta)$. Gli assi di riferimento si suppongono fissi (sempre nel senso attribuito in meccanica a tale appellativo). Rappresenti r la distanza $\overline{PP_0}$, sia cioè

$$r^2 = (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2,$$

le posizioni dei due corpi riferendosi ad un medesimo istante t .

Poniamo ancora $l = ct$, dove c va provvisoriamente ⁽¹⁾ trattata come una costante. Se è definito il moto di m_0 e di m si potranno riguardare sia ξ_0, η_0, ζ_0 quanto ξ, η, ζ come funzioni di l .

Ciò premesso, consideriamo dapprima l'azione esercitata da m_0 su m . Fissiamo all'uopo un istante generico t e la corrispondente posizione P di m . Si può coordinargli l'istante di emissione \bar{t} (o ciò che è lo stesso, il così detto *cammino latente* $\bar{l} = c\bar{t}$) da m_0 mediante la nota equazione di Döppler. Più precisamente, posto

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_0 &= \xi(\bar{l}), & \bar{\eta}_0 &= \eta_0(\bar{l}), & \bar{\zeta}_0 &= \zeta_0(\bar{l}); \\ A^2 &= (\xi - \bar{\xi}_0)^2 + (\eta - \bar{\eta}_0)^2 + (\zeta - \bar{\zeta}_0)^2, \end{aligned}$$

si ha, per definire \bar{l}

$$(1) \quad l - \bar{l} = A.$$

Adotteremo d'ora in avanti il simbolo $\frac{\partial}{\partial l}$ per indicare una derivazione di fronte a cui le quantità ξ_0, η_0, ζ_0 si trattino come costanti, tenendo invece conto della eventuale dipendenza da l di ξ, η, ζ . Analogo significato avrà $\frac{\partial_0}{\partial l}$ scambiato soltanto l'ufficio delle due terne ξ, η, ζ ; ξ_0, η_0, ζ_0 .

(¹) È questo il criterio già seguito nell'Abraham, nello stabilire le equazioni rigorose, in base al principio di relatività. Mi vi attengo io pure per trovare direttamente le equazioni approssimate. Evidentemente potrei ricavare queste stesse equazioni da quelle di Abraham, semplificandole a posteriori, ma la deduzione riesce più spedita ed elegante sfruttando fin dall'origine le convenute approssimazioni.

Ciò convenuto, dalla equazione (1) si ottiene facilmente col metodo di Lagrange (1)

$$\frac{fm m_0}{A \left(1 + \frac{\partial_0 A}{\partial l}\right)} = \frac{fm m_0}{r} + \frac{fm m_0}{2} \frac{\partial_0^2 r}{\partial l^2},$$

dove i termini omissi sono trascurabili quando ci si limiti al secondo ordine rispetto al rapporto della velocità del mobile a quella della luce (2).

Posto per brevità

$$(2) \quad U = \frac{fm_0}{r}, \quad \psi = \frac{1}{2} fm_0 \frac{\partial_0^2 r}{\partial l^2},$$

il potenziale dell'azione gravitazionale esercitantesi su m , va identificato a

$$U + \psi.$$

Analogamente, ove si ponga

$$(2') \quad U_0 = \frac{fm}{r}, \quad \psi_0 = \frac{fm}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial l^2},$$

si ha, per il corpo m_0 , il potenziale

$$U_0 + \psi_0.$$

3. *Equazioni del moto.* — Designiamo con τ_0 e τ due parametri (di cui daremo tra un momento la definizione precisa), che chiameremo *tempi propri* (3) rispettivamente di m_0 e di m . Rappresentiamo con punti e con

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = \text{cost.}$$

apici sovrapposti alle lettere derivazioni rispetto a τ e τ_0 .

(1) Cfr. G. Herglotz, Göttinger Nachrichten, 1904.

(2) Si noti infatti che in $\frac{\partial_0^2 r}{\partial l^2}$ il fattore che moltiplica $\frac{1}{c^2}$ è comparabile fisicamente col quadrato della velocità del mobile.

(3) Secondo la teoria proposta dal sig. Abraham nell'equazione del moto di un punto generico comparisce quale variabile indipendente, al posto del tempo assoluto t , il tempo proprio τ (che coincide in prima approssimazione col tempo assoluto). Per il nostro scopo basterà del resto considerarlo come un parametro, formale, la cui definizione risulterà dalle stesse equazioni differenziali. La circostanza è analoga a quella che si presenta in alcune questioni geometriche o statiche in cui figurino come variabile indipendente l'arco s di curva: lo si può *a priori* riguardare come un parametro generico il significato risultando a posteriori dalla circostanza che le equazioni del problema comportino l'integrale

Allora, secondo Abraham, il moto di m viene retto dalle equazioni:

$$(3) \quad \ddot{\xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} (U + \psi) \quad , \quad \ddot{\eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} (U + \psi) \quad , \quad \ddot{\zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} (U + \psi),$$

$$(4) \quad \dot{l} = - \frac{\partial_0}{\partial l} (U + \psi);$$

e quello di m_0 dalle altre:

$$(3') \quad \ddot{\xi}_0 = \frac{\partial}{\partial \xi_0} (U_0 + \psi_0) \quad , \quad \ddot{\eta}_0 = \frac{\partial}{\partial \eta_0} (U_0 + \psi_0) \quad , \quad \ddot{\zeta}_0 = \frac{\partial}{\partial \zeta_0} (U_0 + \psi_0),$$

$$(4') \quad \dot{l}' = - \frac{\partial}{\partial l'} (U_0 + \psi_0).$$

I tempi propri rimarranno per noi definiti dalla circostanza che le (3) e (4) da un lato e le (3') e (4') dall'altro ammettano gli integrali primi

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 - \dot{l}^2 = 2(U + \psi) + \text{cost}, \\ \dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2 + \dot{\zeta}_0^2 - \dot{l}'^2 = 2(U_0 + \psi_0) + \text{cost}. \end{cases}$$

Nel sistema di equazioni (3), (4) e (3'), (4') si può così prescindere dalle (4), (4') ed intenderle sostituite da queste equazioni di primo ordine (5).

Osserviamo d'altra parte che il concetto relativistico, in base a cui sono state poste le equazioni differenziali del moto, attribuisce alle quantità

$$\begin{aligned} & \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 - \dot{l}^2, \\ & \dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2 + \dot{\zeta}_0^2 - \dot{l}'^2, \end{aligned}$$

valore identicamente eguale ed opposto a quello del quadrato della velocità c della luce. Ora è evidente che tale circostanza non sarebbe in generale compatibile col precedente sistema differenziale [in particolare cogli integrali primi (5)], le quante volte si volesse seguitare a riguardare la velocità c come una costante universale.

I sigg. Abraham e Einstein (da intuizioni la cui analisi eccederebbe il compito che mi sono assunto) sono stati indotti a rinunciare alla incondizionata costanza di c , sostituendo ad essa, quale più intima approssimazione della realtà fisica, la coesistenza delle equazioni (3), (3') e (5). Trattiamo in conformità c come una quantità variabile, per quanto, ben s'intende, non mai molto discosta dalla costante c_0 (valore corrente della velocità della luce).

Potremo scrivere

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 - \dot{l}^2 = -c_0^2(1 - \varepsilon), \\ \dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2 + \dot{\zeta}_0^2 - \dot{l}^2 = -c_0^2(1 - \varepsilon_0), \end{cases}$$

rappresentando ε ed ε_0 come piccole correzioni da ricavarsi in base al confronto di queste equazioni con le (5). Ponendo in queste ultime la costante dei secondi membri eguale a $-c_0^2$ (il che è lecito senza scapito della generalità), si ottiene

$$\varepsilon = \frac{2(U + \psi)}{c_0^2}, \quad \varepsilon_0 = \frac{2(U_0 + \psi_0)}{c_0^2}.$$

È noto che il potenziale unitario è equiparabile, in ordine di grandezza, col quadrato della velocità del mobile. Tenuto conto di ciò e di quanto abbiamo osservato relativamente a ψ e ψ_0 , dalle relazioni precedenti segue, nell'ordine di approssimazione di cui ci accontentiamo,

$$(7) \quad \varepsilon = \frac{2U}{c_0^2}, \quad \varepsilon_0 = \frac{2U_0}{c_0^2}.$$

4. *Cambiamento di variabili nelle equazioni del moto.* — È da osservare che i tempi propri τ e τ_0 non hanno lo stesso valore numerico, non si riferiscono cioè allo stesso istante di tempo assoluto. Conviene pertanto adottare da per tutto una stessa variabile indipendente: sia essa $t = \frac{l}{c_0}$.

Per eseguire la trasformazione ricorriamo alle (6) le quali, ove si ponga

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\xi}{dl}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dl}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dl}\right)^2 &= \beta^2, \\ \left(\frac{d\xi_0}{dl}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_0}{dl}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_0}{dl}\right)^2 &= \beta_0^2, \end{aligned}$$

possano essere scritte sotto la forma

$$(8) \quad \begin{cases} \dot{l}^2(1 - \beta^2) = c_0^2(1 - \varepsilon), \\ \dot{l}^2(1 - \beta_0^2) = c_0^2(1 - \varepsilon_0). \end{cases}$$

Se si tien conto del fatto che β e β_0 sono i rapporti delle velocità di m ed m_0 rispetto a quella della luce, e si hanno presenti le (7), dalle relazioni (8), sempre con la consueta approssimazione, abbiamo

$$\frac{\dot{l}^2}{c_0^2} = \dot{l}^2 = 1 - \varepsilon + \beta^2; \quad \frac{\dot{l}^2}{c_0^2} = \dot{l}^2 = 1 - \varepsilon_0 + \beta_0^2,$$

od anche

$$(9) \quad \dot{t} = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \beta^2 \quad ; \quad \dot{t}' = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 + \beta_0^2.$$

Da queste, pure con la approssimazione solita, otteniamo:

$$(10) \quad \ddot{t} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\beta^2}{dt} - \frac{\partial_0 \varepsilon}{\partial t} \right) \quad , \quad \ddot{t}' = \frac{1}{2} \left(\frac{d\beta_0^2}{dt} - \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} \right) \quad (1),$$

nelle quali i simboli $\frac{\partial_0}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ hanno significato analogo a quello stabilito per $\frac{\partial_0}{\partial l}$, $\frac{\partial}{\partial l}$ nel numero 2.

Infine, per essere

$$\ddot{\xi} = \dot{t}^2 \ddot{\xi}'' + \ddot{t} \dot{\xi}' \quad \text{e} \quad \ddot{\xi}' = \dot{t} \dot{\xi}_0'' + \ddot{t} \xi_0',$$

dalle (3) e (3') avuto riguardo alle (9) e (10), nell'ordine d'approssimazione prefissatoci, ricaviamo, per definire il moto di m , le equazioni:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi'' = (1 + \varepsilon - \beta^2) \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\beta^2}{dt} - \frac{\partial_0 \varepsilon}{\partial t} \right) \xi' + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad , \\ \text{ed analogamente} \\ \eta'' = (1 + \varepsilon - \beta^2) \frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\beta^2}{dt} - \frac{\partial_0 \varepsilon}{\partial t} \right) \eta' + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad , \\ \xi_0'' = (1 + \varepsilon_0 - \beta_0^2) \frac{\partial U_0}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\beta_0^2}{dt} - \frac{\partial_0 \varepsilon_0}{\partial t} \right) \xi_0' + \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \quad ; \end{array} \right.$$

e per quello di m_0 le altre:

$$(11') \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_0'' = (1 + \varepsilon_0 - \beta_0^2) \frac{\partial U_0}{\partial \xi_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\beta_0^2}{dt} - \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} \right) \xi_0' + \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi_0} \quad , \\ \eta_0'' = (1 + \varepsilon_0 - \beta_0^2) \frac{\partial U_0}{\partial \eta_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\beta_0^2}{dt} - \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} \right) \eta_0' + \frac{\partial \psi_0}{\partial \eta_0} \quad , \\ \xi_0'' = (1 + \varepsilon_0 - \beta_0^2) \frac{\partial U_0}{\partial \xi_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\beta_0^2}{dt} - \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} \right) \xi_0' + \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi_0} \quad . \end{array} \right.$$

5. *Forma esplicita delle equazioni del moto.* — Per ottenere in forma esplicita queste equazioni consideriamo la prima delle (11) e la prima delle (11'). Evidentemente il calcolo procederebbe in modo del tutto analogo per le altre equazioni. Indichiamo con v, v_0 ; a, a_0 le velocità e le accelera-

(1) Si può osservare facilmente anche qui che i termini moltiplicati pel fattore $\frac{1}{c^2}$ sono comparabili col quadrato della velocità dei corpi.

zioni di m ed m_0 , e con v_r, v_{or} ; a_r, a_{or} le componenti di queste quantità secondo la retta m_0m . Dalle equazioni che ci proponiamo di considerare, tenuto presente il significato dei diversi simboli che vi intervengono, facilmente si ottiene:

$$\xi'' = -f m_0 \frac{\xi - \xi_0}{r^3} - \frac{\xi'}{c_0^2} v \times a +$$

$$+ \frac{f m_0}{c_0^2} \left\{ \frac{\xi - \xi_0}{r^3} \left(-\frac{2f m_0}{r} + v^2 + \frac{r}{2} a_{or} - \frac{v_0^2}{2} + \frac{3}{2} v_{or}^2 \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r} \left(\frac{\xi_0''}{2} + \frac{\xi'}{r} v_{or} - \frac{\xi'}{r} v_r \right) \right\},$$

$$\xi_0'' = f m \frac{\xi - \xi_0}{r^3} - \frac{\xi_0'}{c_0^2} v_0 \times a_0 -$$

$$- \frac{f m}{c_0^2} \left\{ \frac{\xi - \xi_0}{r^3} \left(-\frac{2f m}{r} + v_0^2 - \frac{r}{2} a_r - \frac{v_0^2}{2} + \frac{3}{2} v_r^2 \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r} \left(\frac{\xi_0''}{2} + \frac{\xi_0'}{r} v_{or} - \frac{\xi_0'}{r} v_r \right) \right\}.$$

In queste alle quantità ξ'', η'', ζ'' ; $\xi_0'', \eta_0'', \zeta_0''$ che sono moltiplicate per $\frac{1}{c_0^2}$ si possono sostituire i loro valori in prima approssimazione (quando cioè si ritengano addirittura trascurabili le velocità dei corpi di fronte a c_0). Allora le equazioni del moto dei due corpi m ed m_0 assumono la forma:

$$(12) \left\{ \begin{aligned} \xi'' &= -f m_0 \frac{\xi - \xi_0}{r^3} + \\ &+ \frac{1}{c_0^2} \frac{f m_0}{r^2} \left\{ \frac{\xi - \xi_0}{r} \left(-\frac{2f m_0}{r} + v^2 - \frac{v_0^2}{2} + \frac{3}{2} v_{or}^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \xi' v_r + (\xi' - \xi_0') v_{or} \right\}, \\ \eta'' &= -f m_0 \frac{\eta - \eta_0}{r^3} + \\ &+ \frac{1}{c_0^2} \frac{f m_0}{r^2} \left\{ \frac{\eta - \eta_0}{r} \left(-\frac{2f m_0}{r} + v^2 - \frac{v_0^2}{2} + \frac{3}{2} v_{or}^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \eta' v_r + (\eta' - \eta_0') v_{or} \right\}, \\ \zeta'' &= -f m_0 \frac{\zeta - \zeta_0}{r^3} + \\ &+ \frac{1}{c_0^2} \frac{f m_0}{r^2} \left\{ \frac{\zeta - \zeta_0}{r} \left(-\frac{2f m_0}{r} + v^2 - \frac{v_0^2}{2} + \frac{3}{2} v_{or}^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \zeta' v_r + (\zeta' - \zeta_0') v_{or} \right\}; \end{aligned} \right.$$

$$(12') \left\{ \begin{array}{l} \xi_0'' = fm \frac{\xi - \xi_0}{r^3} - \\ \quad - \frac{1}{c_0^2} \frac{fm}{r^2} \left\{ \frac{\xi - \xi_0}{r} \left(-\frac{2fm}{r} + v_0^2 - \frac{v^2}{2} + \frac{3}{2} v_r^2 \right) + \right. \\ \quad \quad \quad \left. + \xi_0' v_{0r} - (\xi' - \xi_0') v_r \right\}, \\ \eta_0'' = fm \frac{\eta - \eta_0}{r^3} - \\ \quad - \frac{1}{c_0^2} \frac{fm}{r^2} \left\{ \frac{\eta - \eta_0}{r} \left(-\frac{2fm}{r} + v_0^2 - \frac{v^2}{2} + \frac{3}{2} v_r^2 \right) + \right. \\ \quad \quad \quad \left. + \eta_0' v_{0r} - (\eta' - \eta_0') v_r \right\}, \\ \zeta_0'' = fm \frac{\zeta - \zeta_0}{r^3} - \\ \quad - \frac{1}{c_0^2} \frac{fm}{r^2} \left\{ \frac{\zeta - \zeta_0}{r} \left(-\frac{2fm}{r} + v_0^2 - \frac{v^2}{2} + \frac{3}{2} v_r^2 \right) + \right. \\ \quad \quad \quad \left. + \zeta_0' v_{0r} - (\zeta - \zeta_0') v_r \right\}. \end{array} \right.$$

Così abbiamo ottenuto le equazioni che ci siamo proposti di ricavare. Esse differiscono dalle ordinarie equazioni corrispondente al caso di una propagazione istantanea per termini di secondo grado rispetto il valore inverso del quadrato della velocità della luce. I termini addizionali dipendono dai diversi elementi del moto (eccettuata l'accelerazione).

Fisiologia. — *Ricerche sugli effetti dell'alimentazione maizica. Azione del succo enterico di cane su zeina, gliadina, zeosi e gliadosi* ⁽¹⁾. Nota 4^a di S. BAGLIONI, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Lo scopo delle presenti ricerche (eseguite dal dott. G. Amantea in collaborazione col dott. L. Manini) è stato quello di stabilire:

1) se la zeina e la gliadina fossero attaccate e in quale misura dal succo enterico;

2) se i prodotti della digestione peptica e triptica della zeina e della gliadina (zeosi e gliadosi) fossero ulteriormente digeriti da questo succo.

Servi succo intestinale, fornito da uno stesso cane, operato di ansa alla Vella, che si stimolava o meccanicamente (vi si facevano circolare delle palline di vetro o di altro materiale inerte), o chimicamente (introducendovi

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto fisiologico della R. Università di Roma.