ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

scatori non ne hanno mai presa alcuna coi palamiti (ami) che arrivano fino a 1000 e più metri di profondità? Se ciò era comprensibile finchè si doveva ritenere che l'anguilla maturasse senza ulteriormente prendere alimento, non lo è più quando si ammetta che essa ne abbia ancora bisogno. Certamente riescirà di grande importanza allevare forzatamente in vasche d'acqua salsa anguille argentine di sesso maschile e di sesso femminile, avendo cura di ben nutrirle. Questo esperimento è già stato da me iniziato, e ne attendo con ansia i risultati.

Matematica. — *Sopra l'esistenza di alcuni sistemi equinormali-ortogonali.* Nota del dott. L. AMOROSO, presentata dal Corrispondente V. REINA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Gli enti astratti definiti come enti relativi ad un campo di nozioni.* Nota di C. BURALI-FORTI, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO.

Le classi: *vettore, formazione geometrica* (di Grasmann-Peano) di 1ª, 2ª, 3ª *specie, direzione, lunghezza, area, volume, ampiezza di un angolo* ecc., possono essere *definite nominalmente*, nel modo indicato dal Russel (1), quali classi *i cui elementi sono classi*, oppure possono esser *definite per astrazione* [G. Cantor (2), G. Peano (3), C. Burali-Forti (4)....] come classi *i cui elementi non sono classi*. Il primo modo presenta notevoli inconvenienti e pratici e logici; il secondo ne presenta soltanto di logici, come è già stato osservato da Russell, per ciò che riguarda l'*esistenza* delle classi così definite, e da A. Padoa (5) ed E. Maccaferri (6) per la *pluralità* delle classi individuate.

(1) Whitehead e Russell, *Principia mathematica*.

(2) Definizione dei *numeri cardinali* e *ordinali* e, in generale, dei *tipi d'ordine*.

(3) *Formulario mathematico*, ed. I-V.

(4) *Sur l'égalité*..... Enseignement, a. 1899; *Les propriétés formales*..... Revue de mathematiques, a. 1899; *Notes* degli *Éléments de calcul vectoriel* (A. Hermann, Paris, 1910), pag. 214.

(5) *Dell'astrazione matematica*, II Congresso Società filosofica italiana (Ed. Formigini, Modena, 1908).

(6) L'A. mi ha gentilmente comunicato le sue interessanti osservazioni (che saranno pubblicate presto) su questo argomento, con molti esempi particolari e con la considerazione delle $\Phi(u, \alpha)$, $\mathrm{R}(u, \alpha)$ delle quali si è servito per dimostrare i difetti logici delle ordinarie definizioni per astrazione.

Gli inconvenienti inerenti ai due metodi dipendono, pur essendo di specie diversa, dal *voler* definire le classi considerate come *enti assoluti* nel campo *totale* delle nozioni logico-scientifiche. Se osserviamo che le nozioni in un dato ramo scientifico vanno *ordinatamente* crescendo e che il *campo totale* delle nozioni è a noi necessariamente ignoto, si comprende facilmente che certe classi saranno suscettibili di varie forme di definizioni a seconda del campo già noto di nozioni; vale a dire, queste classi saranno definibili, non in modo assoluto, ma *relativamente* ad un certo campo di nozioni. Stabilita questa *relatività*, le classi *vettore*, ecc., possono esser definite come classi *semplici* in modo da togliere gli inconvenienti logici e pratici ad un tempo. Ciò è quanto mi propongo di esaminare in questa Nota.

1. Essendo u una classe, diremo « relazione per gli u » Rel u, al posto di « operatore che trasforma gli u in classi formate con gli u » (funzione polidroma):

[1] $$u \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.\, \mathrm{Rel}\, u = (\mathrm{Cls}\,{}^{\backprime}u)\, \mathrm{F}\, u \ \text{(1)}.$$

Se x, y sono elementi di u, si dice che « x è nella relazione α con y » quando $x \varepsilon \alpha y$ (x è un αy), e quindi gli ordinarî simboli $=$, $>$, ... di relazione, sono espressi dal simbolo composto $\varepsilon\alpha$.

Una relazione per gli u si dirà *normale*, Rel Norm u, quando è *riflessiva, simmetrica* e *transitiva* (come *eguale a, simile a, parallela a,* ecc.):

[2] $$u \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.$$
$$\mathrm{Rel\ Norm}\, u = \mathrm{Rel}\, u \cap \alpha \ni \{ x , y \varepsilon u \,.\supset_{x,y} : x \varepsilon \alpha y \,.=.\, \alpha x = \alpha y \} .$$

Essendo α una Rel Norm u, indicheremo con $\mathrm{R}(u, \alpha)$, classe di Russel, la classe i cui elementi sono le classi αx variando x in u, e con $\Phi(u, \alpha)$ la classe formata da tutte le classi *simili* ad $\mathrm{R}(u, \alpha)$, cioè da tutte le classi v che possono porsi in *corrispondenza univoca* e *reciproca* con la classe $\mathrm{R}(u, \alpha)$:

[3] $$u \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, \alpha \varepsilon\, \mathrm{Rel\ Norm}\, u \,.\supset.\, \mathrm{R}(u, \alpha) = \{ \iota(\alpha x) | x \} {}^{\backprime} u .$$

[4] $$u \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, \alpha \varepsilon\, \mathrm{Rel\ Norm}\, u \,.\supset.\, \Phi(u, \alpha) = \mathrm{Cls} \cap v \ni \exists \{ v\, \mathrm{F}\, \mathrm{R}(u, \alpha) \}\, \mathrm{rcp} .$$

Se, ad es., u è la classe *retta* e α è la relazione *parallela a*, allora $\mathrm{R}(u, \alpha)$ è la classe *stella di rette parallele*; una delle $\Phi(u, \alpha)$ è la classe *direzione* o *punto all'infinito*.

2. Sia $\mathfrak{N}$ un complesso (classe) di *nozioni logico-scientifiche*, cioè *enti* o *relazioni* o *funzioni logiche, enti* o *relazioni* o *funzioni geometriche, analitiche*, ecc. La classe $\mathfrak{N}$ può essere formata da *tutte* le nozioni che

(1) Faccio uso dei simboli del *Formulario* di G. Peano. Per la definizione di funzione cfr. *Propriétés formales*, pag. 142 (nota a piè di pagina).

noi effettivamente possediamo, o da alcune che a noi piace scegliere, tra quelle note, per formare un certo campo logico-scientifico.

Una classe v si dirà « definibile nominalmente nel campo $\mathfrak{M}$ », quando è possibile di porre

$v =$ « espressione avente significato e formata soltanto con le nozioni $\mathfrak{M}$ ».

Se, ad es., nel campo $\mathfrak{M}$ son compresi *punto* e *distanza*, allora *superficie sferica* è definibile nominalmente in $\mathfrak{M}$, perchè

« *superficie sferica* » = classe v di punti tali che: esiste un punto A e una distanza r tali che qualsiasi punto di v dista di r da A ».

Nulla impedisce che nel campo $\mathfrak{M}$ noi intendiamo comprese tutte le classi, e i loro elementi, che sono definibili nominalmente nel campo $\mathfrak{M}$, poichè tali enti appartengono *virtualmente* al campo e vengono ad appartenervi *materialmente* appena sono definiti nominalmente. E si noti che tali definizioni nominali non sono necessarie, ma soltanto utili per abbreviare il linguaggio.

In virtù di tale convenzione, ed osservando che $\mathfrak{M}$ è classe, risulta che « classe definibile nominalmente nel campo $\mathfrak{M}$ » vale semplicemente « classe di $\mathfrak{M}$ »;

[5] « classe definibile nominalmente nel campo $\mathfrak{M}$ » $= \mathrm{Cls}\,'\mathfrak{M}$.

3. Chiameremo « elemento semplice in $\mathfrak{M}$ » ogni elemento di $\mathfrak{M}$ che non è una classe formata con gli $\mathfrak{M}$:

[6] « elemento semplice in $\mathfrak{M}$ » $= \mathfrak{M} - \mathrm{Cls}\,'\mathfrak{M}$.

Ad es.: nello *spazio di punti*, ogni punto è elemento semplice, mentre le *rette* o *piani* sono elementi non semplici; nello *spazio di rette* o *di piani*, ogni retta o ogni piano è elemento semplice, mentre i punti e i piani (classi di rette) o i punti e le rette (classi di piani) sono elementi non semplici.

Analogamente chiameremo « classe semplice in $\mathfrak{M}$ » ogni classe definibile nominalmente in $\mathfrak{M}$, i cui elementi sono semplici in $\mathfrak{M}$:

[7] « classe semplice in $\mathfrak{M}$ » $= \mathrm{Cls}\,'(\mathfrak{M} - \mathrm{Cls}\,'\mathfrak{M})$.

Una classe definibile nominalmente come classe semplice in un campo $\mathfrak{M}$, può non esser definibile nominalmente come classe semplice in un altro campo. Ad es., la classe *giacitura* non si sa definire come classe semplice nel campo $\mathfrak{M}$ formato dalle nozioni geometriche contenute nei libri di Euclide, ma può esser definita nominalmente come classe semplice nel campo che si ottiene unendo ad $\mathfrak{M}$ la classe *direzione*.

4. Tenuto conto che nello svolgimento progressivo di una scienza il campo iniziale $\mathfrak{M}$ va continuamente aumentando, possiamo stabilire il seguente *principio logico*, o *postulato logico*, che dà il modo di accrescere il

campo $\mathfrak{M}$ e di definire effettivamente, e *rispetto* al campo $\mathfrak{M}$, le ordinarie classi considerate al principio di questa Nota.

Se, essendo u una classe e α una Rel Norm u, *non esiste una* $\Phi(u, \alpha)$ *che sia classe semplice in $\mathfrak{M}$, allora esiste una sola* $\Phi(u, \alpha)$ *che è semplice in un campo $\mathfrak{M}'$ più ampio di $\mathfrak{M}$* (¹):

$$[8] \qquad u \,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\, \alpha \,\varepsilon\, \mathrm{Rel\ Norm}\, u \,.\, - \exists \,\{\Phi(u, \alpha) \cap \mathrm{Cls}\,\text{‘}(\mathfrak{M} - \mathrm{Cls}\,\text{‘}\mathfrak{M})\} \,.\supset .$$
$$\mathrm{Num}\,[\Phi(u, \alpha) \cap v \ni \exists \,\{\mathrm{Campo} \cap \mathfrak{M}' \ni [\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M} \,.\, v \,\varepsilon\, \mathrm{Cls}\,\text{‘}(\mathfrak{M}' - \mathrm{Cls}\,\text{‘}\mathfrak{M}')]\}] = 1.$$

Nell' ipotesi ora fatta, l'unica $\Phi(u, \alpha)$ della quale affermiamo l'esistenza, non è definibile nominalmente nel campo $\mathfrak{M}$, e, come tale, può esser chiamata « classe astratta, rispetto ad $\mathfrak{M}$, determinata da u e α »; brevemente, Abs$(\mathfrak{M}, u, \alpha)$:

$$[9] \qquad \mathrm{Hp}\,[8] \,.\supset .\, \mathrm{Abs}\,(\mathfrak{M}, u, \alpha) =$$
$$\iota\,[\Phi(u, \alpha) \cap v \ni \exists \,\{\mathrm{Campo} \cap \mathfrak{M}' \ni [\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M} \,.\, v \,\varepsilon\, \mathrm{Cls}\,\text{‘}(\mathfrak{M}' - \mathrm{Cls}\,\text{‘}\mathfrak{M}')]\}] .$$

Sia, ad es., $\mathfrak{M}$ il campo delle nozioni logico-geometriche contenute nei libri di Euclide. Se u è la classe *retta* e α la relazione *parallela a*, allora l'ipotesi della [8] è verificata e Abs$(\mathfrak{M}, u, \alpha)$ è l'ordinaria classe *direzione*. Sia u la classe *coppia di punti* e α la relazione tale che per A, B, punti arbitrarii, $\alpha(A, B)$ è la classe formata dalle coppie (X, Y) tali che

« punto medio tra A e Y » = « punto medio tra B e X »;

allora l'ipotesi della [8] è verificata, e Abs$(\mathfrak{M}, u, \alpha)$ è l'ordinaria classe *vettore*.

5. Valga l'ipotesi della [8]. Una relazione tra gli elementi (semplici in $\mathfrak{M}$) della nuova classe Abs$(\mathfrak{M}, u, \alpha)$ e la classe $\mathrm{R}(u, \alpha)$ vien stabilita da una corrispondenza univoca e reciproca f tra le due classi, corrispondenza effettivamente esistente perchè Abs$(\mathfrak{M}, u, \alpha)$ è una delle $\Phi(u, \alpha)$. Giova peraltro notare che delle f ne esistono infinite.

Se x è un u allora $f(\alpha x)$ è un determinato elemento di Abs$(\mathfrak{M}, u, \alpha)$ che, per essere α relazione normale per gli u, coincide con $f(\alpha y)$, qualunque sia l'elemento y di αx. Indicheremo con $f_{u,\alpha}$ l'operatore (univoco ma non più reciproco) tra gli u e gli Abs$(\mathfrak{M}, u, \alpha)$; tale che, per x elemento arbitrario di u, si abbia sempre

$$f_{u,\alpha}\, x = f(\alpha x);$$

$$[10] \qquad \mathrm{Hp}\,[8] \,.\, f \,\varepsilon\, \{\mathrm{Abs}\,(\mathfrak{M}, u, \alpha)\ \mathrm{F}\ \mathrm{R}(u, \alpha)\}\ \mathrm{rcp} \,.\supset .$$
$$f_{u,\alpha} = \iota\,[\mathrm{Abs}\,(\mathfrak{M}, u, \alpha)\ \mathrm{F}\ u \cap \varphi \ni \{x \,\varepsilon\, u \,.\supset_x .\, \varphi x = f(\alpha x)\}] .$$

(¹) Analogo ai postulati esistenziali dei quali si fa uso in geometria per passare dalla geometria della *retta* a quella del *piano*, da quella del *piano* a quella dello *spazio* (ecc. per spazî a più di tre dimensioni).

L'operatore $f_{u,\alpha}$ stabilisce una delle infinite relazioni tra gli u e gli Abs$(\mathfrak{M}, u, \alpha)$; e per x, y elementi arbitrarii di u gode della proprietà seguente:

$$[11] \qquad f_{u,\alpha} x = f_{u,\alpha} y \,.=.\, y \,\varepsilon\, \alpha x \,.$$

Per il primo degli esempî considerati alla fine del n. 4, $f_{u,\alpha}$ è l'operatore *direzione di* o *punto all'infinito di*; la [11] esprime che due rette hanno egual direzione solamente quando sono parallele. Per il secondo esempio, $f_{u,\alpha}(A \,.\, B)$ equivale alla notazione, di Hamilton e di Grassmann, $B - A$, e quindi indica il « vettore da A a B »; la [11] esprime che $B - A = Y - X$ solamente quando $A + Y = B + X$, cioè solamente quando i segmenti AY, BX hanno a comune il punto medio.

6. Da quanto abbiamo esposto risulta chiaramente come si possano *definire per astrazione* le *classi astratte rispetto al campo* $\mathfrak{M}$. Fissato il campo $\mathfrak{M}$, data la classe u e la relazione normale α per gli u, constatata l'inesistenza di classi $\Phi(u, \alpha)$ semplici in $\mathfrak{M}$, allora si può affermare, in virtù del postulato [8], l'esistenza e l'univocità di una nuova classe Abs$(\mathfrak{M}, u, \alpha)$ in un campo $\mathfrak{M}'$ che, *al minimo*, risulta formato dalla somma logica di $\mathfrak{M}$ con la classe Abs$(\mathfrak{M}, u, \alpha)$. Dopo ciò, è possibile collegare gli R(u, α) con gli Abs$(\mathfrak{M}, u, \alpha)$ mediante un operatore f univoco e reciproco; da questo si ricava l'operatore $f_{u,\alpha}$, univoco ma non reciproco, che collega gli u con gli Abs$(\mathfrak{M}, u, \alpha)$. Che ciascuno di tali collegamenti non possa farsi in un sol modo è evidente; altrimenti, Abs$(\mathfrak{M}, u, \alpha)$ sarebbe definibile nominalmente come classe semplice in $\mathfrak{M}$.

Tra questa conclusione e il collegamento ordinario tra gli u e gli Abs$(\mathfrak{M}, u, \alpha)$ vi è una apparente contraddizione. Ad es.: nel comune linguaggio geometrico si ammette implicitamente, anzi instintivamente, che « punto all'infinito della retta x » sia un ente X *univocamente* determinato dalla retta x. Ora a ciò siamo condotti da una imperfetta analisi della questione. Invero: sia β un operatore *univoco* e *reciproco* che trasforma punti all'infinito in punti all'infinito; le ordinarie proprietà del parallelismo non subiscono la benchè minima alterazione se βX, e non il supposto ente X, si considera come punto all'infinito di x.

7. Forme rudimentali di definizione per astrazione sono usate: da Euclide per la definizione di *rapporto*; dai fisici per la *massa, temperatura*, ecc.; da G. Cantor per la definizione di *numero cardinale* e *numero ordinale* ecc. [1].

Nel *Formulario Matematico* di G. Peano, si procede, in sostanza, così: si considera, da prima, una $f_{u,\alpha}$, della quale peraltro non si dà defi-

[1] Secondo G. Cantor, la nostra classe Abs$(\mathfrak{M}, u, \alpha)$ vien definita come « quella idea generale che per mezzo della nostra attiva facoltà di pensare si deduce da u e da α ».

nizione formale; la relazione [11] tra la $f_{u,\alpha}$, e la α si stabilisce per definizione; si ammette implicitamente che la [11] basti per definire la f e la classe Abs$(\mathfrak{M}, u, \alpha)$. Che per tal via non si possa raggiungere lo scopo resta evidente pensando alla pluralità delle f (pluralità inevitabile) e alla pluralità delle $\Phi(u, \alpha)$ (pluralità che si evita introducendo il campo $\mathfrak{M}$ e le classi semplici in tal campo).

Il principio logico da me inserito nelle *Notes* degli *Éléments de calcul vectoriel*, non è logicamente preciso, ma si rende esatto *introducendo* il campo $\mathfrak{M}$, l'ipotesi della [8] (elementi *sottintesi* nelle ordinarie definizioni e che era necessario analizzare, come ho fatto, per poterne far uso esplicito); e inoltre: *sostituendo* a « il existe alors une classe unique v et une fonction unique f » la frase « il existe alors une classe unique v, *simple* par rapport au domaine $\mathfrak{M}$, et une fonction f ».

L'inesattezza logica delle forme comuni di definizione per astrazione, è indiscutibile; esse devono dunque essere abbandonate e credo che possano esser convenientemente sostituite (sia nel campo scientifico, sia in quello didattico) dalla forma indicata in questa Nota

Alcuni ritengono, col Russell, che le $R(u, \alpha)$ debbano, in ogni caso, essere sostituite alle ordinarie intuitive ed instintive classi semplici, che, esattamente, sono le classi Abs$(\mathfrak{M}, u, \alpha)$ da me individuate. Ora ciò non è ammissibile. Non *praticamente*, perchè alle $R(u, \alpha)$ manca l'usuale carattere di *classe semplice*, e gli enti definiti successivamente con le R divengono ben presto così complessi da risultare immaneggiabili. Non *logicamente*, sia perchè quando esistano classi semplici v appartenenti a $\Phi(u, \alpha)$, non pare possibile stabilire un criterio generale di scelta tra le v e $R(u, \alpha)$, sia perchè una stessa classe può essere rappresentata da classi $R(u, \alpha)$ in modi diversi. Ecco un esempio di questo ultimo caso: La classe *numero intero* è data quale $R(u, \alpha)$ da una classe i cui elementi sono classi formate da classi finite, tutte simili tra loro (classe di classi di classi!) (1); la classe *razionale* è data quale $R(u, \alpha)$ da una classe di coppie di numeri interi (e, quindi, da una classe di coppie di classi di classi!!); ma per le esigenze del calcolo formale algebrico l'intero a deve potersi identificare al razionale $a/1$, e quindi una « classe di classi di classi » viene ad essere *identificata* ad una « classe di coppie di classi di classi »; il che è assurdo.

(1) Per il numero *uno* si ha, ad es.,

$$1 = \mathrm{Cls} \cap u \ni \{ \exists u \,.\, x, y \,\varepsilon\, u \,.\supset_{x,y} .\, x = y \},$$

contrariamente alle più comuni idee che si annettono al numero *uno*.