ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Meccanica. — *Sugli operatori funzionali ereditarii.* Nota dell'ing. GIOVANNI GIORGI, presentata dal Corrisp. A. DI LEGGE.

Questa Nota fa seguito alla precedente *Sui problemi della elasticità ereditaria* (¹); e ha per oggetto la discussione dei simboli

$$(1)\qquad \begin{aligned} \Phi(\Delta) &= \int_0^\infty \varphi(\theta)\, e^{-\theta\Delta}\, d\theta \\ \Psi(\Delta) &= \int_0^\infty \psi(\theta)\, e^{-\theta\Delta}\, d\theta \end{aligned}$$

che è necessaria come preliminare alle ulteriori Note che ho promesso di dedicare allo stesso argomento. I detti simboli sono operatori funzionali, espressi sotto forma di funzioni analitiche dell'operatore differenziale $\Delta = \frac{d}{dt}$. Le loro proprietà, secondo la teoria applicata (²), dipendono dalla forma che avrebbero le funzioni $\Phi(\Delta)$, $\Psi(\Delta)$, qualora Δ, anzichè un simbolo di derivazione, rappresentasse una variabile complessa. Occorre dunque effettuare per sommi capi la discussione di questa forma analitica.

In tutto il corso della presente Nota pongo dunque $\Delta = \xi + i\eta$. Tengo presente che $\varphi(\theta)$, $\psi(\theta)$ sono funzioni date sperimentalmente, e hanno l'andamento rappresentato dalle fig. 1 e 2 della Nota precedente; cioè partono da una ordinata iniziale finita o infinita per $\theta = +0$, e asintoticamente tendono a zero per $\theta = +\infty$, il tutto con legge tale che il loro integrale preso fra i limiti $0, \infty$ converge sempre assolutamente. Considero le (1) come formole che, mediante le due funzioni conosciute di variabile reale $\varphi(\theta)$, $\psi(\theta)$, definiscono (almeno in un certo campo) due funzioni di variabile complessa $\Phi(\Delta)$, $\Psi(\Delta)$, che si tratta di descrivere.

Il passaggio dalle une funzioni alle altre, nelle (1) è effettuato per mezzo di trasformazioni integrali, che più particolarmente sono trasformazioni di Laplace. Si applicano dunque i teoremi generali di Scheeffer (³) e di L. Pisati (⁴) e quelli, più speciali, della teoria delle funzioni generatrici e delle loro de-

(¹) Questi Rendiconti, vol. XXI, serie 5ª, 2° sem. 1912, pp. 412-418.

(²) Teoria fondata sui risultati che ho esposto in un altro lavoro, già richiamato: *Sul calcolo delle soluzioni funzionali*, etc. Atti dell'Associazione Elettrotecnica Italiana, vol. IX (1905), pp. 651-699, al quale continuerò a riferirmi nel corso della presente Nota.

(³) Scheeffer, *Ueber einige bestimmte Integrale betrachtet als Functionen eines complexen Parameters*, Habilitationsschrift, 1883.

(⁴) Laura Pisati, *Sulle corrispondenze funzionali non analitiche, originate da integrali definiti*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, vol. XXV (1° sem., 1908), pp. 272-282.

terminanti ([1]), oltre ai risultati che ho esposto nelle precedenti ricerche sugli operatori funzionali ([2]). Si riconoscono quindi le seguenti proprietà, che mi limiterò a enunciare, senza trattenermi sui metodi di dimostrazione, non difficili a immaginare.

Anzitutto, il campo di convergenza di ciascuno degli integrali (1) è un semipiano limitato da una parallela all'asse immaginario, e include almeno il semipiano delle ξ positive, e può eventualmente estendersi anche a coprire l'intero piano complesso. In tutti i punti interni, al senso stretto, a esso campo di convergenza (e, in ogni caso, anche in quelli dell'asse immaginario, quando pure formi frontiera), la convergenza è inoltre assoluta; e sono verificate (questa volta escludendo l'asse immaginario, se forma frontiera) le condizioni di continuità e monogeneità. Quindi, nell'interno dei loro semipiani di convergenza, le $\Phi(\Delta)$, $\Psi(\Delta)$ risultano analitiche e olomorfe; e sulla rispettiva linea di frontiera hanno almeno un punto singolare (che però non può essere un polo, se la linea è l'asse immaginario). Le funzioni così definite, sono da immaginarsi completate con tutto il prolungamento analitico di cui sono eventualmente suscettibili; salvo, se questo conduce a molteplicità di rami, separarli mediante tagli secondo semirette parallele all'asse reale, che dai punti di diramazione vadano nel senso delle ξ negative, e scegliere come ramo principale quello che contiene i valori dati dalle (1) direttamente ([3]).

([1]) Cfr. Pincherle, *Sur les fonctions déterminantes*, Annales de l'École Norm. Supér., T. XXI (1905), pp. 9-68; *Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti*, Atti del IV Congresso Internaz. dei Matemat., Roma (1908), vol. II, pp. 44-48; e l'articolo dello stesso autore sulle *Funktional-Gleichungen und -Operationen* nella Encykl. d. Math. Wiss., Bd. II, Tl. I, A 11 (Leipzig, 1906).

([2]) Ved. la Memoria citata *Sul calcolo* etc., parte II, §§ 5, 6; parte III, §§ 7, 8, e parte V.

([3]) La ragione di questa scelta sta nella struttura delle formole cosiddette di valutazione definita o fondamentale, che si devono poi applicare per la calcolazione dei risultati; cfr. le formole (7), (8) della Nota precedente, tenendo conto di quanto è detto nella parte III della Memoria *Sul calcolo* etc. Le funzioni $\Phi(\Delta)$, $\Psi(\Delta)$ devono figurare sotto il vincolo di integrali definiti, il cui percorso d'integrazione nel piano complesso è una linea soggetta alla condizione di essere riconciliabile col semicerchio infinito di destra di esso piano. È da osservare che la constatazione dell'olomorfismo nel semipiano $\xi > 0$ vale solamente pel ramo principale così definito. Questa constatazione — e, in termini più generali, quella della analiticità delle $\Phi(\Delta)$, $\Psi(\Delta)$ — è necessaria conseguenza del fatto che le φ, ψ sono integrabili fra 0 e $+\infty$, e che si annullano per valori negativi del loro argomento; cioè che gli integrali (1) non hanno contributo di elementi dati da valori negativi di θ. Fisicamente, si risolve dunque in una *condizione di successione*, la quale esprime che, in ogni caso, l'effetto ereditario non può mai precedere la causa che lo produce; ed è condizione certamente verificata in ogni fenomeno, qualunque siano le particolarità ulteriori della legge ereditaria che l'esperienza può di volta in volta rivelare. Gli altri rami diversi da quello principale, non soddisfano in generale alla condizione di successione: quindi non hanno interesse per lo studio dei fenomeni ereditarî; soltanto l'insieme della funzione con tutti i suoi rami può intervenire in ricerche sulle vibrazioni dei sistemi liberi.

Precisata così la defizione delle funzioni e del loro campo di esistenza, la discussione ulteriore dei loro caratteri dipende da questa relazione: che le proprietà al finito delle Φ, Ψ, dipendono da quelle all'infinito delle φ, ψ, e reciprocamente (¹).

In particolare, l'ascissa della linea di frontiera del campo di convergenza di cui sopra, cioè l'ascissa del punto singolare più vicino all'asse reale, si deduce dal comportamento asintotico della rispettiva $\varphi(\theta)$ o $\psi(\theta)$. Così, se $\varphi(\theta)$ per $\theta = +\infty$ si comporta come $C\,e^{-A\theta}$ ($+$ eventuali termini a decrescenza maggiormente rapida), dove C sia una costante, o una funzione a comportamento asintotico algebrico (cioè che non cresca o non decresca più di una potenza positiva o negativa di θ), allora la detta ascissa, per la funzione $\Phi(\Delta)$, è uguale a $-$A; se $\varphi(\theta)$ ha comportamento asintotico più rapidamente decrescente di qualunque funzione esponenziale, p. es. se si annulla all' ∞ come $C\,e^{-\theta^2}$, l'ascissa in questione è $= -\infty$, cioè la $\Phi(\Delta)$ risulta una trascendente intera. Previsioni più generali, valevoli in casi meno semplici, si possono ottenere applicando, sia un noto teorema di Landau, sia altre formole asintotiche deducibili con procedimento analogo a quello di Cauchy-Hadamard che dà il raggio di convergenza di una serie di potenze.

Quando in pratica (come si fa comunemente) si trascurano le azioni ereditarie da un'epoca remota in poi, le $\Phi(\Delta)$, $\Psi(\Delta)$ risultano di necessità trascendenti intere. E se si ammette che l'esperienza non possa mai decidere sull'esattezza di questa supposizione, o che con lo scegliere sufficientemente remota l'epoca in questione sia conseguibile qualunque approssimazione prefissa, si deve anche ritenere che la sostituzione delle $\Phi(\Delta)$, $\Psi(\Delta)$ con opportune trascendenti intere è sempre permessa, senza conseguenza accertabile sui risultati. Questa osservazione elimina la necessità della ricerca, altrimenti assai complicata, di tutti i punti singolari al finito delle funzioni Φ, Ψ. Ma qualora, per opportunità di certi calcoli, o per altre particolari ricerche, convenga trattare le funzioni medesime come non prive di punti singolari al finito, si deve tener presente che l'esperienza, pur lasciando incerta l'esistenza e la natura di questi punti, impone alcune limitazioni alla loro distribuzione e alla loro « intensità ». Anzitutto sappiamo che non possono invadere il semipiano delle ξ positive; quelli eventuali sull'asse immaginario non possono essere poli, perchè ivi la funzione deve restare finita; quelli del semipiano negativo hanno « coefficienti d'intensità » che dipendono dalle loro ascisse. Per precisare con un esempio: se $\Phi(\Delta)$ contiene un termine $\dfrac{C}{(\Delta-\varrho)^m}$ (C costante, m reale positivo qualunque, ϱ reale negativo qualunque), deve $\varphi(\theta)$ contenere corrispondentemente la funzione generatrice di questo termine, e quindi contenere un termine $C\,\dfrac{\theta^{m-1}}{\Gamma(m)}\,e^{\varrho\theta}$; e la decre-

(¹) Cfr. L. Pisati, op. cit., pag. 279.

scenza dei valori di $\varphi(\theta)$, osservata esperimentalmente, può fornire di volta in volta per C un limite inferiore, dipendente dal valore assoluto attribuito all'ascissa negativa ϱ.

Veniamo ora allo studio delle proprietà per $\Delta = \infty$; queste hanno maggiore importanza, perchè si connettono con le proprietà al finito della funzione coefficiente. In particolare, è il comportamento nelle direzioni $\pm i\infty$ quello che interessa considerare. Se la $\varphi(\theta)$, ovvero $\psi(\theta)$, si suppone finita anche nell'ordinata iniziale (cioè per $\theta = +0$), la rispettiva $\Phi(\Delta)$, ovvero $\Psi(\Delta)$, si annulla di primo ordine nelle direzioni $\pm i\infty$; più precisamente, se tale ordinata iniziale di $\varphi(\theta)$ ha un valore C, la $\Phi(\Delta)$ per $\Delta = \pm i\infty$, si comporta come una funzione C/Δ. Se invece la funzione coefficiente si suppone dotata di ordinata iniziale infinita, ma si tiene conto che è funzione integrabile e non « impulsiva », si deduce che la rispettiva Φ, Ψ, per $\Delta = \pm i\infty$, si annulla ancora, ma di ordine che non raggiunge il primo: p. es., se $\varphi(\theta)$ inizialmente si comporta come $C\theta^{-\frac{1}{2}}$, il comportamento asintotico di $\Phi(\Delta)$ per $\Delta = \pm i\infty$ è dato da $C\sqrt{\pi}\,\Delta^{-\frac{1}{2}}$; e così di seguito [1]. Siccome nella Nota precedente, a proposito delle figg. 1 e 2, ho fatto rilevare la poca diversa conseguenza pratica del supporre finita o infinita l'ordinata iniziale delle funzioni coefficienti, resta anche di poca importanza il decidere precisamente sull'ordine di annullamento asintotico di Φ, Ψ per $\Delta = \pm i\infty$, e basta avere accertato il fatto dell'annullamento.

Di tutti gli altri dati relativi al comportamento delle Φ, Ψ, i più importanti sono i valori assunti sull'asse immaginario. Il significato fisico di questi valori è evidente dalla struttura delle (1). P. es., $\Phi(0)$ è l'integrale di $\varphi(\theta)$, ed è quindi uguale a quella costante che abbiamo indicato con $h_0^2 - h^2$, e che si è trovata nel primo diagramma della fig. 1 della Nota precedente. Similmente, $\Psi(0) = k^2 - k_0^2$. Più in generale, $\Phi(i\omega)$ è una costante che si ritrova nella espressione del movimento periodico dovuto a un azione periodica $e^{i\omega t}$; e similmente per $\Psi(i\omega)$. Nelle formole risolutive dei problemi, ricordiamo, le $\Phi(\Delta)$, $\Psi(\Delta)$ intervengono entro espressioni che vanno integrate lungo l'asse immaginario, o, se si vuole, lungo una qualunque parallela all'asse immaginario, contenuta nel semipiano di convergenza. Per conseguenza, per i calcoli basta conoscere la successione dei valori assunti lungo una linea siffatta. E in pratica, tenuto conto della convergenza degli integrali, e dell'annullamento asintotico delle Φ, Ψ (le quali poi devono essere integrate dopo moltiplicate per funzioni oscillanti), basta conoscere un numero limitato di valori, su punti convenientemente scelti fino a una sufficiente

[1] Cfr. i §§ citati della Memoria *Sul calcolo* ecc., e inoltre il § 9. La denominazione di funzione *impulsiva* è qui usata nel significato di cui ho fatto uso ivi, a partire dal § 1, art. 4, significato che risale a lord Rayleigh e più specialmente a Heaviside. Significherebbe funzione che diventa infinitamente grande su un intervallo infinitamente piccolo, con legge tale che il suo integrale su quell'intervallo sia una quantità finita.

distanza dall'asse reale. Questi valori (complessi) si possono calcolare facilmente per integrazione grafica o numerica, eseguita sulle curve $\varphi(\theta)$, $\psi(\theta)$, rispettivamente da sole, e moltiplicate per funzioni $\cos\omega\theta$, $\operatorname{sen}\omega\theta$, con valori di ω convenientemente scelti; oppure, più in generale, partendo da curve $\varphi(\theta)\,e^{-\alpha\theta}$, $\psi(\theta)\,e^{-\alpha\theta}$ se i risultati si vogliono ottenere relativi a punti di una parallela all'asse immaginario, condotta a distanza $+\alpha$. Con la scelta opportuna di α, e di pochi valori di ω, si possono ottenere dati sufficienti per la calcolazione numerica, con una approssimazione prefissa.

Un'ultima osservazione. La relazione che fa dipendere Φ da φ, ovvero Ψ da ψ, e similmente anche la relazione reciproca (la quale è di forma analoga, perchè la trasformazione di Laplace gode di proprietà involutoria), è riconducibile a quella che mette in rapporto (mediante l'integrale di Cauchy) una funzione analitica generica $F(z)$ con la *forma* del coefficiente A_n del suo sviluppo di Taylor, considerato come funzione dell'indice n. Con la sostituzione $e^{-\Delta}=z$, l'elemento degli integrali (1) diviene una potenza di z, e gli integrali stessi si presentano come una generalizzazione delle serie di Taylor; la sostituzione trasforma il semipiano di convergenza, in un cerchio di convergenza, di cui un caso limite è appunto il cerchio di Cauchy-Hadamard. Di qui un legame fra due teorie apparentemente molto discoste: la predeterminazione della forma di una funzione analitica, del suo prolungamento, e delle sue singolarità, quando è dato il coefficiente generale del suo sviluppo tayloriano in funzione dell'indice; e lo studio matematico delle proprietà ereditarie dei corpi. Questo ravvicinamento lascia prevedere che l'un problema debba gettar luce sull'altro; e in particolare, che quelle soluzioni dei problemi ereditarî che sono state date dal Volterra in forma diversa da quella qui esposta, possano venire reciprocamente utilizzate per studiare in forma nuova il difficilissimo quesito dei prolungamenti analitici delle funzioni di variabile complessa. Ma questo interessante argomento ci condurrebbe ora troppo fuori del nostro cammino.

Concludendo: Le funzioni $\Phi(\Delta)$, $\Psi(\Delta)$ risultano analitiche, olomorfe nel semipiano $\xi>0$, finite su tutto l'asse immaginario, e tendono a zero nelle direzioni $\Delta=\pm i\infty$. Possono venire sostituite con trascendenti intere, pur realizzando nei calcoli un'approssimazione comunque elevata; e l'esperienza non può mai rilevare una deviazione da questo comportamento. Pei calcoli, basta conoscere i valori assunti su un certo numero di punti dell'asse immaginario, o di una parallela all'asse immaginario; e questi valori si scelgono e si calcolano con metodi grafici o aritmetici, nel modo indicato.

Nelle Note successive, vedremo come queste proprietà si utilizzano per ricavare le risolventi effettive delle equazioni di fisica ereditaria.