ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

(a 18°.2), Mailfert [1] 0,64 (a 0°), Ladenburg [2] 0.01, Moufang [3] 0,0047 (a 2°); però secondo un recentissimo lavoro di V. Rothmund [4] tale coefficiente ammonta, per l'acqua a 0°, a 0,494; come anche Rothmund ha messo in evidenza la discordanza nei dati sopra riportati dipende principalmente dal fatto che, presso al limite di saturazione, l'acqua scompone rapidamente l'ozono.

Geologia. — *Le isole maltesi. Cenni geologici.* Nota del Socio C. De Stefani.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica fisica. — *Presenza dell'elio nei berilli.* Memoria del Corrisp. A. Piutti.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Matematica. — *Sopra l'esistenza di alcuni sistemi equinormali-ortogonali.* Nota del dott. L. Amoroso, presentata dal Corrispondente V. Reina.

Sia S un'area rettangolare del piano x, y, precisamente l'area

$$o \leq x \leq a \qquad o \leq y \leq b,$$

e diciamo Γ_2 l'insieme delle funzioni di x, y integrabili superficialmente entro S, in senso di Lebesgue, insieme coi loro quadrati e coi loro prodotti due a due; Γ'_2 l'insieme (contenuto in Γ_2) delle funzioni di x, y integrabili parzialmente rispetto ad x, insieme coi loro quadrati, in senso di Lebesgue, nell'intervallo oa qualunque sia y nell'intervallo ob, e parzialmente rispetto ad y, insieme coi loro quadrati, in senso di Lebesgue, nell'intervallo ob, qualunque sia x nell'intervallo oa; infine diciamo Γ''_2 l'insieme (contenuto in Γ'_2) delle funzioni di x, y continue e limitate entro S, colle derivate prime continue e limitate e le derivate seconde appartenenti a Γ'_2.

[1] Comptes Rendus *119*, 951 (1894).
[2] Berl. Ber. *31*, 2510 (1898).
[3] Centralblatt. 1911 II, pag. 1674.
[4] Nernst-Festschrift, (Knapp, Halle a. d. S. 1912), pag. 391.

Recentemente [1] abbiamo dimostrato:

A) *Una funzione arbitraria di* Γ_2'', $f(x,y)$ *è sviluppabile in una serie convergente assolutamente ed uniformemente in tutto il rettangolo* $o \leq x \leq a$, $o \leq y \leq b$:

$$(1) \qquad f(x,y) = (f)_{x=y=0} + x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=y=0} + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x=y=0} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu(x,y) \int_0^b \int_0^a \left\{ \frac{\partial^2 f(\xi,o)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \psi_\nu(\xi,o)}{\partial \xi^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f(\xi,\eta)}{\partial \xi\,\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi_\nu(\xi,\eta)}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{\partial^2 f(o,\eta)}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \psi_\nu(o,\eta)}{\partial \eta^2} \right\} d\xi\, d\eta\,,$$

le $\psi_n(x,y)$ essendo funzioni di Γ_2'' che soddisfano alle seguenti condizioni:

I** annullarsi insieme con le loro prime derivate per $x = y = o$.

II** se $\theta(x,y)$ è una funzione di Γ_2'', che si annulla insieme con le sue derivate prime per $x = y = o$, e che per tutti i valori di ν verifichi alla

$$(2) \qquad \int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^2 \theta(\xi,o)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \psi_\nu(\xi,o)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta(\xi,\eta)}{\partial \xi\,\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi_\nu(\xi,\eta)}{\partial \xi\,\partial \eta} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \theta(o,\eta)}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \psi_\nu(o,\eta)}{\partial \eta^2} \right) d\xi\, d\eta = 0$$

$$\nu = 1, 2, \ldots$$

sia necessariamente $\theta(x,y) = 0$;

III** sieno verificate le

$$(3) \qquad \int_0^b \int_0^a \left\{ \frac{\partial^2 \psi_\mu(\xi,o)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \psi_\nu(\xi,o)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_\mu(\xi,\eta)}{\partial \xi\,\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi_\nu(\xi,\eta)}{\partial \xi\,\partial \eta} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \psi_\mu(o,\eta)}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \psi_\nu(o,\eta)}{\partial \eta^2} \right\} d\xi\, d\eta = 1\,,\ \mu = \nu$$

$$= 0\,,\ \mu \neq \nu\,.$$

B) ϱ funzioni arbitrarie di Γ_2'': $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, ... $f_\varrho(x,y)$ *sono sviluppabili simultaneamente nelle serie*

$$(4) \qquad f_j(x,y) = f_j(o,o) + x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=y=0} + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x=y=0} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_{j,\nu}(x,y) \int_0^b \int_0^a \sum_{r=1}^{\varrho} \left(\frac{\partial^2 f_r(\xi,o)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \psi_{r,\nu}(\xi,o)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f_r(\xi,\eta)}{\partial \xi\,\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi_{r,\nu}(\xi,\eta)}{\partial \xi\,\partial \eta} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f_r(o,\eta)}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \psi_{r,\nu}(o,\eta)}{\partial \eta^2} \right) d\xi\, d\eta$$

$$j = 1, 2, \ldots \varrho$$

[1] Nuovo Cimento, novembre **1912**, *Gli sviluppi in serie*, etc., § 6, 7.

convergenti assolutamente ed uniformemente nel rettangolo $o \leq x \leq a$, $o \leq y \leq b$, le $\psi_{rs}(x, y)$ essendo funzioni di Γ_2'' che verificano alle condizioni:

**I. annullarsi tutte insieme con le loro prime derivate per $x = 0$, $y = 0$;

**II. se $\theta_1(x, y), \ldots \theta_\rho(x, y)$ sono funzioni di Γ_1', per le quali si abbia, per ogni valore dell'indice ν,

$$\text{(5)} \qquad \int_0^a \sum_{r=1}^{\rho} \left(\frac{\partial^2 \theta_r(\xi, o)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \psi_{r,\nu}(\xi, o)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta_r(\xi, \eta)}{\partial \xi \, \partial \eta} \frac{\partial^2 \psi_{r,\nu}(\xi, \eta)}{\partial \xi \, \partial \eta} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 \theta_r(o, \eta)}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \psi_{r,\nu}(o, \eta)}{\partial \eta^2} \right) d\xi \, d\eta = 0$$
$$\nu = 1, 2, \ldots,$$

sia identicamente $\theta_j(x, y) = 0$, $(j = 1, 2, \ldots \rho)$;

**III. sieno verificate le relazioni:

$$\text{(6)} \qquad \int_0^a \sum_{r=1}^{\rho} \left(\frac{\partial^2 \psi_{r,\mu}(\xi, o)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \psi_{r,\nu}(\xi, o)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_{r,\mu}(\xi, \eta)}{\partial \xi \, \partial \eta} \frac{\partial^2 \psi_{r,\nu}(\xi, \eta)}{\partial \xi \, \partial \eta} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 \psi_{r,\mu}(o, \eta)}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \psi_{r,\nu}(o, \eta)}{\partial \eta^2} \right) d\xi \, d\eta = 1 \;, \; \mu = \nu$$
$$= 0 \;, \; \mu \neq \nu \,.$$

Secondo una locuzione già introdotta in un caso analogo diremo *equinormale ortogonale* [1] un sistema di funzioni $\psi_r(x, y)$ di Γ_2'' $(r = 1, 2, \ldots)$ che verifica alle (3); ed *equinormale ortogonale in complesso*, un sistema di funzioni $\psi_{rs}(x, y)$ $(r = 1, 2, \ldots \rho \,;\, s = 1, 2, \ldots)$ di Γ_2'', che verifica alle (6).

Scopo di questa Nota è di mostrare l'effettiva esistenza di sistemi equinormali ortogonali del tipo indicato: cioè di funzioni di Γ_2'' che verificano alle condizioni I**, II**, III**, e di funzioni di Γ_2'' che verificano alle **I, **II, **III.

2. Sia perciò

$$P_1(x), P_2(x), \ldots$$

un sistema di funzioni Γ_2, indipendenti da y, *chiuso* e *normale ortogonale nell'intervallo* $o \leq x \leq a$: tale cioè che si abbia

$$\text{(7)} \qquad \int_0^a P_\mu(x) \, P_\nu(x) \, dx = 0 \qquad \mu \neq \nu$$
$$= 1 \qquad \mu = \nu \,,$$

[1] Rend. Accad. Lincei, 1910, 2° sem., pag. 268.

mentre dalle

$$\int_0^a h(x)\,\mathrm{P}_\nu(x)\,dx = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

$[h(x)$ essendo una funzione di $\boldsymbol{\Gamma}_2$ indipendente da $y]$ segua $h(x) = 0$, identicamente entro $o \leq x \leq a$, tranne che in un insieme di punti di misura nulla. Analogamente sia

$$\mathrm{Q}_1(x, y), \mathrm{Q}_2(x, y), \ldots$$

un sistema di funzioni di $\boldsymbol{\Gamma}_2$, *chiuso* e *normale ortogonale nel rettangolo* $o \leq x \leq a$, $o \leq y \leq b$; e infine sia

$$\mathrm{R}_1(y), \mathrm{R}_2(y), \ldots$$

un sistema di funzioni di $\boldsymbol{\Gamma}_2$, indipendenti da x, *chiuso* e *normale ortogonale nell'intervallo* $o \leq y \leq b$.

Poniamo allora

$$\tag{9} \left\{ \begin{aligned} &\Psi_{3\nu-2} = \frac{1}{b}\int_0^x (x-\xi)\,\mathrm{P}_\nu(\xi)\,d\xi, \\ &\Psi_{3\nu-1} = \int_0^y\!\!\int_0^x \mathrm{Q}_\nu(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta, \qquad \Psi_{3\nu} = \frac{1}{a}\int_0^y (y-\eta)\,\mathrm{R}_\nu(\xi)\,d\xi \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \nu = 1, 2, \ldots \end{aligned} \right.$$

Dico che il sistema

$$\psi_1, \psi_2, \ldots$$

soddisfa alle precedenti condizioni I**, II**, III**.

Infatti le (9) mostrano immediatamente che le ψ_n sono funzioni di $\boldsymbol{\Gamma}_2''$ che si annullano insieme con le loro derivate prime per $x = y = 0$. Inoltre si ha:

$$\tag{10} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2\psi_{3\nu-2}(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{b}\mathrm{P}_\nu(x), \quad \frac{\partial^2\psi_{3\nu-2}(x)}{\partial x\,\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2\psi_{3\nu-2}(x)}{\partial y^2} = 0 \\ &\frac{\partial^2\psi_{3\nu-1}(x, o)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\psi_{3\nu-1}(x, y)}{\partial x\,\partial y} = \mathrm{Q}_\nu(x, y), \quad \frac{\partial^2\psi_{3\nu-1}(o, y)}{\partial y^2} = 0 \\ &\frac{\partial^2\psi_{3\nu}(y)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\psi_{3\nu}(y)}{\partial x\,\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2\psi_{3\nu}(y)}{\partial y^2} = \frac{1}{a}\mathrm{R}_\nu(y) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \nu = 1, 2, \ldots \end{aligned} \right.$$

in tutto il rettangolo $o \leq x \leq a$, $o \leq y \leq b$, tranne al più in un insieme di punti di misura nulla. Da queste relazioni, tenute presenti le (7) e le analoghe, relative alle $Q_\nu(x,y)$, $R_\nu(y)$, consegue

$$\int_0^b\int_0^a\left(\frac{\partial^2\psi_m(x,o)}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi_n(x,o)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_m(x,y)}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\psi_n(x,y)}{\partial x\,\partial y}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\psi_m(o,y)}{\partial y^2}\frac{\partial^2\psi_n(o,y)}{\partial y^2}\right)dx\,dy=0\ ,\ m\neq n$$
$$=1\ ,\ m=n,$$

cioè la (3).

Infine sia $\theta(x,y)$ una funzione di Γ_2'', nulla insieme con le sue derivate prime per $x=y=0$, per la quale si abbia identicamente per ogni indice m,

$$\int_0^b\int_0^a\left(\frac{\partial^2\theta(x,o)}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi_m(x,o)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta(x,y)}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\psi_m(x,y)}{\partial x\,\partial y}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\theta(o,y)}{\partial y^2}\frac{\partial^2\psi_m(o,y)}{\partial y^2}\right)dx\,dy=0\,.$$
$$m=1,2,\ldots$$

Si avrà per $m=3\nu-2$, $\nu=1,2,\ldots$, posto mente alla (10),

$$\int_0^a\frac{\partial^2\theta(x,o)}{\partial x^2}P_\nu(x)\,dx=0\,;$$
$$\nu=1,2,\ldots$$

da cui, in forza delle (8), segue

$$\frac{\partial^2\theta(x,o)}{\partial x^2}=0$$

in tutto il rettangolo $o\leq x\leq a$, $o\leq y\leq b$, tranne al più in un insieme di punti di misura nulla.

Analogamente per $m=3\nu-1$, $m=3\nu$ si raccoglie [successivamente nei due casi]

$$\frac{\partial^2\theta(x,y)}{\partial x\,\partial y}=0\quad,\quad\frac{\partial^2\theta(o,y)}{\partial y^2}=0$$

sempre in tutto il rettangolo $o\leq x\leq a$; $o\leq y\leq b$, tranne al più in un insieme di misura nulla. Tenendo conto che $\theta(x,y)$ è per ipotesi una funzioni di Γ_2'', nulla insieme con le sue prime derivate per $x=y=0$, ne viene immediatamente che è

$$\theta(x,y)=0\,.$$

3. Supponiamo che, invece di avere un solo sistema, si abbiano ϱ sistemi di funzioni di Γ_2'',

$$P_{r1}(x)\,,\ P_{r2}(x)\,,\ldots \qquad r=1\,,2\,,\ldots\varrho$$

complessivamente chiusi e complessivamente normali ortogonali entro il rettangolo $o \leq x \leq a$, $o \leq y \leq b$: cioè tali che si abbia

$$\sum_{r=1}^{\varrho}\int_0^a P_{r,\mu}(\xi)\,P_{r,\nu}(\xi)\,d\xi = 0 \ ,\ \mu = \nu$$
$$= 1\ ,\ \mu \neq \nu\,,$$

mentre dalle

$$\sum_{r=1}^{\varrho}\int_0^a h_r(\xi)\,P_{r\nu}(\xi)\,d\xi = 0\,, \qquad \nu = 1\,,2\,,\ldots$$

$h_1(x)\,,\ldots,\,h_\varrho(x)$ essendo funzione di Γ_2, indipendenti da y, segua identicamente $h_1(x) = h_2(x) = \cdots = h_\varrho(x) = 0$, in tutto l' intervallo $o \leq x \leq a$, tranne al più in un insieme di punti di misura nulla.

Analogamente sieno

$$Q_{r1}(x\,,y)\quad,\quad Q_{r2}(x\,,y)\,,\ldots$$

ϱ sistemi di funzioni di Γ_2'', *complessivamente chiusi* e *complessivamente normali ortogonali entro il rettangolo* $o \leq x \leq a$, $o \leq y \leq b$; e

$$R_{r,1}(y)\quad,\quad R_{r,2}(y)\,,\ldots$$

ϱ sistemi di funzioni di Γ_2'', indipendenti da x, *complessivamente chiusi* e *complessivamente normali ortogonali entro l'intervallo* $o \leq y \leq b$.

Costruiamo le funzioni

$$\psi_{r,3\nu-2} = \frac{1}{b}\int_0^x (x-\xi)\,P_{r,\nu}(\xi)\,d\xi$$

$$\psi_{r,3\nu-1} = \int_0^y\int_0^x Q_{r,\nu}(\xi\,,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$\psi_{r,3\nu} \ = \frac{1}{a}\int_0^y (y-\eta)\,R_{r,\nu}(\eta)\,d\eta\,. \qquad \nu = 1\,,2\,,\ldots$$

Per via del tutto analoga a quella seguìta precedentemente, si dimostra allora che esse *costituiscono ϱ sistemi di funzioni di* Γ_2'',

$$\psi_{r1}\,,\ \psi_{r2}\,,\ldots \qquad r = 1\,,2\,,\ldots,\varrho$$

che soddisfano alle condizioni **I, **II, **III.

4. Gli sviluppi (1), (4) si estendono alle funzioni di tre variabili [1]: le funzioni $\psi_{r,\nu}(x, y, z)$ $(r = 1, \ldots, \varrho\ ,\ \nu = 1, 2, \ldots)$, per cui essi procedono, soddisfacendo a condizioni del tutto analoghe alle precedenti I**, II** e III**.

L'esistenza effettiva di sistemi di funzioni che soddisfano a queste condizioni si dimostra per via COMPLETAMENTE analoga a quella, ora seguìta pel caso di due variabili.

ERRATA-CORRIGE

Nella citata Memoria *Gli sviluppi in serie* etc. (Nuovo Cimento, novembre 1912) nella formula che dà l'enunciato del lemma di Schmidt (§ 2) al posto di $\varphi_i(z)$ occorre leggere $\varphi_i(x)$; nel quinto rigo (non contate le formule) dopo la formula (7) invece che « poichè $\varphi_\nu(a)$ è zero » occorre leggere « poichè $\psi_\nu(a)$ è zero »; nelle formule (22) e (25) al posto di $\dfrac{\partial^2 f(\eta, o)}{\partial \eta^2}$, $\dfrac{\partial^2 \psi_\nu(\eta, o)}{\partial \eta^2}$ occorre leggere (come del resto apparisce evidente dal contesto) $\dfrac{\partial^2 f(o, \eta)}{\partial \eta^2}$, $\dfrac{\partial^2 \psi_\nu(o, \eta)}{\partial \eta^2}$.

Meccanica. — *Sopra le vibrazioni armoniche smorzate di un corpo elastico immerso in un fluido.* Nota di E. LAURA, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

È fisicamente intuitivo, che le vibrazioni di un corpo elastico isotropo vibrante in un fluido indefinito non possono essere in generale delle armoniche semplici, qualora vibratore e fluido non sieno sollecitati da forze di massa. Il moto del vibratore è comunicato, invero, in parte al fluido e quindi la sua energia totale tende ad estinguersi.

Mi propongo nella presente Nota di dedurre simile risultato dalla considerazione del comportamento all'infinito di potenziali analoghi a quelli già considerati dall'Helmoltz e supponendo inoltre la continuità della tensione e della velocità normale attraverso la superficie del vibratore.

1. Sieno (u, v, w) (u_1, v_1, w_1) due spostamenti regolari nel vibratore (spazio S), i quali verificheranno perciò in S le equazioni dei piccoli moti dei corpi elastici isotropi. Se (X_ν, Y_ν, Z_ν) $(X_\nu^{(1)}, Y_\nu^{(1)}, Z_\nu^{(1)})$ sono le corrispondenti tensioni unitarie sulla superficie σ del vibratore attraverso l'elemento di normale interno ν, il teorema di reciprocità fornirà l'equazione:

$$(1)\qquad \int_S \varrho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u_1 + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} v_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} w_1 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} u - \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} v - \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} w\right) dS =$$
$$= \int_\sigma (X_\nu u_1 + Y_\nu v_1 + Z_\nu w_1 - X_\nu^{(1)} u - Y_\nu^{(1)} v - Z_\nu^{(1)} w)\, d\sigma$$

se, come supponiamo, il vibratore non è sollecitato da forze di massa.

[1] Cfr. Nuovo Cimento, loc. cit.