ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

4. Gli sviluppi (1), (4) si estendono alle funzioni di tre variabili [1]: le funzioni $\psi_{r,\nu}(x, y, z)$ $(r = 1, \ldots, \varrho\ ,\ \nu = 1, 2, \ldots)$, per cui essi procedono, soddisfacendo a condizioni del tutto analoghe alle precedenti I**, II** e III**.

L'esistenza effettiva di sistemi di funzioni che soddisfano a queste condizioni si dimostra per via COMPLETAMENTE analoga a quella, ora seguìta pel caso di due variabili.

ERRATA-CORRIGE

Nella citata Memoria *Gli sviluppi in serie* etc. (Nuovo Cimento, novembre 1912) nella formula che dà l'enunciato del lemma di Schmidt (§ 2) al posto di $\varphi_i(z)$ occorre leggere $\varphi_i(x)$; nel quinto rigo (non contate le formule) dopo la formula (7) invece che « poichè $\varphi_\nu(a)$ è zero » occorre leggere « poichè $\psi_\nu(a)$ è zero »; nelle formule (22) e (25) al posto di $\dfrac{\partial^2 f(\eta, o)}{\partial \eta^2}$, $\dfrac{\partial^2 \psi_\nu(\eta, o)}{\partial \eta^2}$ occorre leggere (come del resto apparisce evidente dal contesto) $\dfrac{\partial^2 f(o, \eta)}{\partial \eta^2}$, $\dfrac{\partial^2 \psi_\nu(o, \eta)}{\partial \eta^2}$.

Meccanica. — *Sopra le vibrazioni armoniche smorzate di un corpo elastico immerso in un fluido.* Nota di E. LAURA, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

È fisicamente intuitivo, che le vibrazioni di un corpo elastico isotropo vibrante in un fluido indefinito non possono essere in generale delle armoniche semplici, qualora vibratore e fluido non sieno sollecitati da forze di massa. Il moto del vibratore è comunicato, invero, in parte al fluido e quindi la sua energia totale tende ad estinguersi.

Mi propongo nella presente Nota di dedurre simile risultato dalla considerazione del comportamento all'infinito di potenziali analoghi a quelli già considerati dall'Helmoltz e supponendo inoltre la continuità della tensione e della velocità normale attraverso la superficie del vibratore.

1. Sieno (u, v, w) (u_1, v_1, w_1) due spostamenti regolari nel vibratore (spazio S), i quali verificheranno perciò in S le equazioni dei piccoli moti dei corpi elastici isotropi. Se (X_ν, Y_ν, Z_ν) $(X_\nu^{(1)}, Y_\nu^{(1)}, Z_\nu^{(1)})$ sono le corrispondenti tensioni unitarie sulla superficie σ del vibratore attraverso l'elemento di normale interno ν, il teorema di reciprocità fornirà l'equazione:

$$(1)\quad \int_S \varrho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u_1 + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} v_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} w_1 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} u - \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} v - \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} w\right) dS =$$
$$= \int_\sigma (X_\nu u_1 + Y_\nu v_1 + Z_\nu w_1 - X_\nu^{(1)} u - Y_\nu^{(1)} v - Z_\nu^{(1)} w)\, d\sigma$$

se, come supponiamo, il vibratore non è sollecitato da forze di massa.

[1] Cfr. Nuovo Cimento, loc. cit.

Il moto generato nel fluido (il quale è supposto inizialmente in quiete) ammetta un potenziale di velocità Φ, il quale, poichè il moto del fluido come quello del vibratore è supposto piccolo, soddisfa all'equazione:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi \quad , \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \tag{2}$$

In essa c è la velocità del suono nel fluido, e questo è supposto pure non sollecitato da forze di massa.

Gli spostamenti considerati nelle (1) sieno possibili nel vibratore quando è immerso nel fluido. Esisteranno in corrispondenza due potenziali di velocità Φ, Φ_1 che, oltre soddisfare la (2), verificheranno sopra σ quelle condizioni che derivano dalla ipotesi supposta della continuità delle tensioni e delle componenti normali di velocità attraverso σ.

Abbiamo così le equazioni (sopra σ) [1]:

$$\tag{2^{bis}} \left\{ \begin{aligned} & (X_\nu , Y_\nu , Z_\nu) = \varrho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial \nu} , \frac{\partial y}{\partial \nu} , \frac{\partial z}{\partial \nu} \right) \\ & \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial \nu} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial \nu} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \nu} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \end{aligned} \right.$$

e quattro analoghe per lo spostamento u_1 , v_1 , w_1 e il potenziale Φ_1. Da queste si deduce:

$$X_\nu u_1 + Y_\nu v_1 + Z_\nu w_1 = \varrho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \left(u_1 \frac{\partial x}{\partial \nu} + v_1 \frac{\partial y}{\partial \nu} + w_1 \frac{\partial z}{\partial \nu} \right) = \varrho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} s_\nu^{(1)}$$

$$X_\nu^{(1)} u + Y_\nu^{(1)} v + Z_\nu^{(1)} w = \varrho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \left(u \frac{\partial x}{\partial \nu} + v \frac{\partial y}{\partial \nu} + w \frac{\partial y}{\partial \nu} \right) = \varrho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} s_\nu .$$

La (1) diviene allora:

$$\varrho \int_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u_1 + \cdots - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} u - \cdots \right) dS = \varrho_1 \int_\sigma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} s_\nu^{(1)} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} s_\nu \right) d\sigma . \tag{3}$$

Supponiamo ora lo spostamento nel vibratore, e il potenziale di velocità nel fluido dipendere da t a mezzo di un esponenziale.

Poniamo cioè:

$$\tag{4} \left\{ \begin{aligned} & u , v , w = e^{\lambda_m t} (u_m , v_m , w_m) \quad , \quad u_1 , v_1 , w_1 = e^{\lambda_n t} (u_n , v_n , w_n) \\ & \Phi = \mu_m e^{\lambda_m t} \varphi_m \quad , \quad \Phi_1 = \mu_n e^{\lambda_n t} \varphi_n . \end{aligned} \right.$$

Le $u_m , v_m \, w , _m , \varphi_m , \ldots$ sono funzioni di posizione e soddisfanno a equazioni che è facile formare. Le λ_m , λ_n saranno poi radici di una equazione trascen-

[1] ϱ_1 è la densità nel fluido.

dente in λ, la quale si ricava dalle equazioni in superficie (del tipo 2 *bis*) nello stesso modo in cui si ottiene l'equazione di frequenza delle vibrazioni libere di un corpo elastico [1].

Con la posizione (4), la (3) diviene allora, dopo facili riduzioni:

$$(5)\qquad \varrho(\lambda_m^2-\lambda_n^2)\int_S (u_m u_n + v_m v_n + w_m w_n)\, dS =$$
$$= -\varrho_1 \frac{\mu_m \mu_n}{\lambda_m \lambda_n}\int_\sigma \left(\lambda_m^2 \varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} - \lambda_n^2 \varphi_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu}\right) d\sigma .$$

Sia σ_1 una superficie tutta esterna al vibratore. Diciamo ν_1 la sua normale interna, S_1 lo spazio compreso tra σ e σ_1. In esso si ha [per la (2)]:

$$c^2 \Delta \varphi_m = \lambda_m^2 \varphi_m ,$$
$$c^2 \Delta \varphi_n = \lambda_n^2 \varphi_n .$$

E poichè per il lemma di Green si ha pure:

$$\int_{S_1} \varphi_m \Delta \varphi_n \, dS_1 = \int_\sigma \varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} d\sigma - \int_{\sigma_1} \varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu_1} d\sigma_1 - \int_{S_1} \Delta_1(\varphi_m , \varphi_n)\, dS_1 ,$$

dove si è posto:

$$\Delta_1(\varphi_m , \varphi_n) = \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}\frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} ,$$

avremo infine:

$$\int_\sigma \left(\lambda_m^2 \varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} - \lambda_n^2 \varphi_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu}\right) d\sigma = \int_{\sigma_1} \left(\lambda_m^2 \varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} - \lambda_n^2 \varphi_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu}\right) d\sigma_1 -$$
$$- (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_{S_1} \Delta_1(\varphi_m , \varphi_n)\, dS .$$

La (5) allora diviene (supposto $\lambda_m^2 - \lambda_n^2 \neq 0$):

$$(6)\qquad \varrho \int_S (u_m u_n + v_m v_n + w_m w_n)\, dS + \varrho_1 \int_{S_1} \Delta_1(\varphi_m , \varphi_n)\, dS_1 =$$
$$= -\varrho_1 \frac{\mu_m \mu_n}{\lambda_m \lambda_n} \frac{1}{\lambda_m^2 - \lambda_n^2} \int_{\sigma_1} \left(\lambda_m^2 \varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu_1} - \lambda_n^2 \varphi_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu_1}\right) d\sigma_1 .$$

Nel fluido si ha d'altra parte propagazione di sole onde progressive; il potenziale di velocità nel fluido sarà dunque esprimibile nella forma di

[1] E cioè dalle equazioni in superficie, che nell'attuale problema sono quattro, e da quella della superficie del vibratore si eliminano le x, y, z e la μ. Cfr. le mie due Note in questi Rendiconti, vol. XXI, 1° sem., pp. 754-759; 2° sem., pp. 20-25, dove una simile equazione è calcolata nel caso delle vibrazioni di una lastra piana e nel caso di una sfera vibrante radialmente.

un potenziale ritardato, e le φ_m, φ_n sotto forma di potenziali generalizzati di Helmoltz [1]:

$$(7)\quad \begin{cases} \varphi_m(Q) = \displaystyle\int_S F(P) \frac{e^{-\lambda_m \frac{r}{c}}}{r}\, dS\,, \\ \varphi_n(Q) = \displaystyle\int_S F(P) \frac{e^{-\lambda_n \frac{r}{c}}}{r}\, dS\,, \end{cases}$$

essendo P la posizione dell'elemento dS e r la distanza dei punti P, Q.

L'equazione di cui λ_m, λ_n sono radici (che solo per brevità ma impropriamente [2] dirò di frequenza nel seguito) è a coefficienti reali; potremo perciò assumere nella (6) per λ_m, λ_n una coppia di radici complesse coniugate. Per la validità della (6) supporremo inoltre diversa da zero la parte reale di λ_m.

Poniamo:

$$\frac{\lambda_m}{c} = h + ik$$

$$\frac{\lambda_n}{c} = h - ik\,.$$

Avremo allora:

$$L = \frac{1}{\lambda_m^2 - \lambda_n^2} \int_{\sigma_1} \left(\lambda_m^2\, \varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu_1} - \lambda_n^2\, \varphi_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu_1} \right) d\sigma =$$

$$= \frac{1}{4ihk} \int_S \int_S F(P)\, F(P_1)\, dS\, dS_1 \int_{\sigma_1} \Bigg[(h+ik)^2 \frac{e^{-(h+ik)r}}{r} \times$$

$$\times \left\{ -(h-ik) \frac{e^{-(h+ik)r_1}}{r_1} - \frac{e^{-(h-ik)r_1}}{r_1^2} \right\} -$$

$$-(h-ik)^2 \frac{e^{-(hi-k)r}}{r} \left\{ -(h+ik) \frac{e^{-(h+ik)r_1}}{r_1} - \frac{e^{-(h+ik)r_1}}{r_1^2} \right\} \Bigg] \frac{\partial r_1}{\partial \nu_1}\, d\sigma_1\,,$$

[1] Se le λ sono immaginarie pure si hanno quei potenziali per primo considerati dall'Helmoltz. Per la loro irregolarità all'infinito nel caso di λ imaginario puro cfr. Pockels, *Ueber die Gleichung* $\Delta_2 u + h^2 u = 0$. Il caso di λ imaginario con parte reale diversa da zero è stato considerato da me nella Memoria: *Sopra i moti vibratori semplici e smorzati* ecc. Acc. Sc. di Torino, tomo LX, serie II.

[2] Se questa equazione ammette invero una radice $\alpha + i\beta$, a questa corrisponde una vibrazione del tipo smorzato (cfr. la mia Memoria sopra citata) se $\alpha < 0$. Questa è di frequenza β $\left(\text{cioè di periodo } \frac{2\pi}{\beta}\right)$; la quantità α è poi un coefficiente di smorzamento. La suddetta equazione dovrebbe perciò dirsi l'equazione ai periodi e agli smorzamenti.

nella quale P, P_1 sono le posizioni degli elementi dS, dS_1 e r, r_1 sono le distanze di questi punti dall'elemento $d\sigma_1$. Semplificando otteniamo:

$$L = -\frac{2(h^2+k^2)}{4hk}\int_S\int_S F(P)\,F(P_1)\,dS\,dS_1 \times$$
$$\times \int_{\sigma_1}\frac{e^{-h(r+r_1)}}{r\,r_1}\left[k\cos k(r-r_1) + h\,\mathrm{sen}\,k(r-r_1)\right]\frac{\partial r_1}{\partial \nu_1}\,d\sigma_1 +$$
$$+\frac{1}{2hk}\int_S\int_S F(P)\,F(P_1)\,dS\,dS_1 \times$$
$$\times\int_{\sigma_1}\frac{e^{-h(r+r_1)}}{r\,r_1^2}\left[(h^2-k^2)\,\mathrm{sen}\,k(r-r_1) - 2hk\cos k(r-r_1)\right]\frac{\partial r_1}{\partial \nu_1}\,d\sigma.$$

Gli integrali superficiali del 2° membro hanno significato pure al limite quando come superficie σ_1 si assuma quella di una sfera il cui raggio R tende a divenire infinito. Poichè d'altro lato il 1° membro della (6) nella posizione (7*bis*) fatta è sempre positivo (è per di più crescente con R), ed il coefficiente $\varrho_1\dfrac{\lambda_m\,\lambda_n}{\mu_m\,\mu_n}$ è pur esso positivo, dovrà aversi:

$$L < 0.$$

Al limite il 2° integrale che compare nell'espressione di L è trascurabile rispetto al 1°, e $\dfrac{\partial r_1}{\partial \nu_1}$ tende a -1. Il segno di L (al limite) è dunque quello di:

$$L_1 = \lim\frac{h^2+k^2}{2hk}\int_S\int_S F(P)\,F(P_1)\,dS\,dS_1 \times$$
$$\times\int_{\sigma_1}\frac{e^{-h(r+r_1)}}{r\,r_1}\left\{k\cos k(r-r_1) + h\,\mathrm{sen}\,k(r-r_1)\right\}d\sigma.$$

Si scambi l'ordine delle integrazioni, allora subito si vede che è nullo l'integrale che contiene $\mathrm{sen}\,k(r-r_1)$. E poichè allora:

$$L_1 = \lim\frac{h^2+k^2}{2h}\int_{\sigma_1}d\sigma_1\left\{\int_S F(P)\frac{e^{-hr}}{r}\cos kr\,dS\int_S F(P_1)\frac{e^{-hr_1}}{r_1}\cos kr_1\,dS_1 +\right.$$
$$\left.+\int_S F(P)\frac{e^{-hr}}{r}\,\mathrm{sen}\,kr\,dS\int_S F(P_1)\frac{e^{-hr_1}}{r_1}\,\mathrm{sen}\,kr_1\,dS_1\right\}$$
$$= \lim\frac{h^2+k^2}{2h}\int_{\sigma_1}d\sigma_1\left\{\left[\int_S F(P)\frac{e^{-hr}}{r}\cos kr\,dS\right]^2 +\right.$$
$$\left.+\left[\int_S F(P)\frac{e^{-hr}}{r}\,\mathrm{sen}\,kr\,dS\right]^2\right\},$$

si conclude che il segno di L_1 (e quindi quello di L) coincide con il segno di h.

Per quanto precede si dovrà dunque avere:

$$h < 0 .$$

Sicchè: le sole vibrazioni del tipo:

$$e^{-ht}[\cos kt \,.\, u(x , y , z) - \operatorname{sen} kt\, u'(x , y , z)] ,$$

dove $h \neq 0$, che possono sussistere nel moto di un corpo elastico immerso in un fluido sono quelle per le quali si ha:

$$h < 0$$

ossia quelle di tipo *armonico smorzato*.

Per discutere le armoniche semplici e i moti aperiodici del vibratore devesi non più ricorrere all'equazione (6) (teorema di reciprocità) ma bensì all'equazione delle forze vive. Rimando questa discussione a una 2ª Nota.

Matematica — *Serie di Taylor e funzioni analitiche di più variabili*. Nota del prof. EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Corrispondente O. TEDONE.

Matematica. — *Sopra le funzioni ordinatrici*. Nota di FILIPPO SIBIRANI, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Ilmenite delle cave di pietra ollare al Sasso di Chiesa* (Val Malenco). Nota di L. MAGISTRETTI, presentata dal Corrisp. E. ARTINI [1].

In una precedente Nota [2] ebbi occasione di descrivere il giacimento di minerali delle cave di pietra ollare al Sasso di Chiesa.

Caratteristici minerali di questo giacimento sono: Granato, Vesuvianite, Aragonite, Apatite, Clorite e soprattutto Ilmenite.

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del Museo Civico di Storia Naturale in Milano.

[2] L. Magistretti, *Osservazioni sui minerali delle cave di pietra ollare al Sasso di Chiesa* (Val Malenco). Rend. R. Acc. Lincei, 1910.