ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

e normale, e così ricche di ozono da sentirsi evidentissimo l'odore di questo: è ozonizzata in modo eminente l'acqua acidula o Forte delle Bagnore (Santa Fiora nel Monte Amiata), e in grado minore quella della fonte dei Bagnoli (Arcidosso nel Monte Amiata);

2) del fatto si propone una possibile spiegazione, spiegazione basata sull'autossidazione del bicarbonato ferroso o di per sè o per opera di Beggiatoe ferrigene: ciò corrisponderebbe a un nuovo modo di produzione dell'ozono in natura: su questo argomento altri studî seguiranno;

3) si accenna alla grande importanza che nella terapeutica (e forse anche per altre applicazioni) possono avere tali acque veramente ozonizzate; importanza che potrà mettersi in evidenza e specificarsi, sia tenendo conto dell'azione medicamentosa, già empiricamente accertata, delle acque esaminate, sia istituendosi, dai medici e dagli idrologi, speciali studî sopra l'acqua delle Bagnore e sopra acque artificialmente ozonizzate.

Meccanica — *Sopra le vibrazioni armoniche smorzate di un corpo elastico immerso in un fluido.* Nota II di E. Laura, presentata dal Socio C. Somigliana.

2. Sia W il potenziale elastico unitario del vibratore corrispondente allo spostamento u, v, w; Φ il potenziale di velocità nel fluido. L'equazione delle forze vive, per il moto del vibratore, assume allora ovviamente la forma:

$$(9)\qquad \left\{ \frac{\varrho}{2}\int_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] dS + \int_S W\, dS \right\}_0^t =$$

$$= -\,\varrho_1 \int_0^t dt \int_\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial t}\,\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\, d\sigma\,,$$

dove il simbolo $\left\{\ \right\}_0^t$ indica differenza dei valori che assume la funzione in parentesi agli istanti 0 e t.

Sia:

$$\lambda_n = i\,k_n \qquad (k_n \text{ quantità reale})$$

una radice imaginaria pura dell'equazione di frequenza. Poniamo perciò:

$$(10)\qquad u = \cos k_n t\; u_n(x\,, y\,, z) \quad \text{ecc.}$$

Porremo per la Φ, in corrispondenza della posizione (10),

$$
(11) \quad \begin{aligned}
\Phi(Q) = \int_S F(P) \frac{\cos k_n \left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} dS = \cos k_n t \int_S F(P) \frac{\cos k_n \frac{r}{c}}{r} dS + \\
+ \operatorname{sen} k_n t \int_S F(P) \frac{\operatorname{sen} k_n \frac{r}{c}}{r} dS = \varphi_n(Q) \cos k_n t + \psi_n(Q) \operatorname{sen} k_n t ,
\end{aligned}
$$

e ciò perchè nel fluido si ha propagazione di sole onde progressive.

Per la posizione (10) il 1° membro di (9) diviene una funzione periodica di t, mentrechè il 2° per la posizione (11) diviene somma di una funzione periodica di t (con lo stesso periodo della 1ª) e del termine:

$$
\frac{\varrho_1}{2} k_n t \int_\sigma \left(\varphi_n \frac{\partial \psi_n}{\partial \nu} - \psi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \right) d\sigma = \frac{\varrho_1 t}{2} H
$$

Dico che H è nulla solo se è identicamente nulla la F.

Procediamo perciò come nel numero precedente. Sia σ_1 una superficie tutta esterna a S, S_1 lo spazio compreso tra σ e σ_1. Nello spazio S_1 si ha:

$$
\Delta(\varphi_n , \psi_n) = - \frac{k_n^2}{c^2} (\varphi_n , \psi_n).
$$

Avremo dunque per il lemma di Green:

$$
H = k_n \int_{\sigma_1} \left(\varphi_n \frac{\partial \psi_n}{\partial \nu_1} - \psi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu_1} \right) d\sigma_1 \qquad \nu_1 = \text{normale interna a } \sigma_1 .
$$

E quindi per la posizione (11):

$$
H = \frac{k_n^2}{c} \int_S \int_S F(P) F(P_1) dS dS_1 \times
$$

$$
\times \int_{\sigma_1} \left(\frac{\cos \frac{k_n}{c} (r - r_1)}{r r_1} + \frac{\operatorname{sen} \frac{k_n}{c} (r - r_1)}{r r_1^2} \right) \frac{\partial r_1}{\partial \nu_1} d\sigma_1 .
$$

Sia σ_1 una superficie sferica di raggio R tendente all'infinito. Gli integrali superficiali hanno significato pure al limite. Al limite quello contenente il seno si annulla, e $\frac{\partial r_1}{\partial \nu_1}$ tende a -1. Avremo dunque:

$$
(12) \quad \begin{aligned}
H = - \frac{k_n^2}{c} \lim \int_S \int_S F(P) F(P_1) dS dS_1 \int_{\sigma_1} \frac{\cos \frac{k_n}{c} (r - r_1)}{r r_1} d\sigma_1 \\
= - \frac{k_n^2}{c} \lim \int_{\sigma_1} d\sigma_1 \left[\left\{ \int_S \frac{\cos \frac{k_n}{c} r}{r} F(P) dS \right\}^2 + \right. \\
\left. + \left\{ \int_S F(P) \frac{\operatorname{sen} \frac{k_n}{c} r}{r} dS \right\}^2 \right] .
\end{aligned}
$$

Cioè H è costantemente negativa.

Notiamo che H può esprimersi mediante un integrale esteso allo spazio S. Nello spazio S, per le espressioni assunte per le φ_n, ψ_n, applicando il teorema di Lorenz, si ha:

$$\begin{cases} \Delta\varphi_n + \dfrac{k_n^2}{c^2}\varphi_n = -4\pi \mathrm{F} \\ \Delta\psi_n + \dfrac{k_n^2}{c^2}\psi_n = 0 . \end{cases}$$

Perciò:

$$\int (\varphi_n \Delta \psi_n - \psi_n \Delta \varphi_n)\, d\mathrm{S} = 4\pi \int \mathrm{F}\, \psi_n\, d\mathrm{S} =$$

$$= 4\pi \int_{\mathrm{S}}\int_{\mathrm{S}} \mathrm{F(P)}\,\mathrm{F(P_1)}\, \frac{\operatorname{sen} \dfrac{k_n}{c} r}{r}\, d\mathrm{S}\, d\mathrm{S}_1 ,$$

avendo posto:

$$r = |\mathrm{P\,P_1}|,$$

da questa, per il lemma di Green, consegue:

$$\mathrm{H} = -\frac{4\pi k_n^2}{c} \int_{\mathrm{S}}\int_{\mathrm{S}} \mathrm{F(P)}\,\mathrm{F(P_1)}\, \frac{\operatorname{sen} \dfrac{k_n}{c} r}{\dfrac{k_n}{c} r}\, d\mathrm{S}\, d\mathrm{S}_1 .$$

Alla stessa formola si perviene calcolando l'integrale superficiale che compare nella (12); questo calcolo conferma la validità del suddetto passaggio al limite. Diciamo α l'angolo che $\mathrm{P\,P_1}$ fa con la direzione comune dei raggi r, r_1 (al limite) e poniamo $l = \mathrm{P\,P_1}$; avremo:

$$\lim \int_{\sigma_1} \frac{\cos k_n(r - r_1)}{r\, r_1}\, d\sigma_1 = 2\pi \int_0^\pi \cos\left(\frac{k_n l}{c} \cos\alpha\right) \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha = \frac{4\pi}{c}\, \frac{\operatorname{sen} \dfrac{k_n l}{c}}{\dfrac{k_n l}{c}}$$

e quindi discende ancora la (13).

Si conclude quindi: *il nucleo simmetrico* $\dfrac{\operatorname{sen} \dfrac{k_n}{c} r}{\dfrac{k_n r}{c}}$ *è definito positivo.*

Infine la (9), per essere soddisfatta dalla posizione (10), vuole che Φ sia identicamente nulla; cioè che non vi sia propagazione di moto nel fluido.

Nell'ipotesi da noi fatta, della continuità delle tensioni e dello spostamento normale attraverso la superficie del vibratore, possono effettivamente sussistere nel vibratore delle vibrazioni semplici non propagantesi nel fluido. Basterà che esse dieno tensioni nulle e spostamenti normali ancora nulli sulla superficie. L'esistenza di tali vibrazioni è stata provata dal Lamb nella sua classica Memoria sopra le vibrazioni libere di una sfera elastica isotropa [1].

3. Passiamo infine a considerare i moti aperiodici. Sia λ_n una radice reale dell'equazione di frequenza. In corrispondenza ad essa avremo una soluzione del problema:

$$u = e^{\lambda_n t}\, u_n(x\,,y\,,z) \text{ ecc.,} \qquad \Phi = \mu_n\, e^{\lambda_n t}\, \varphi_n(x\,,y\,,z)\,.$$

La equazione (9) quando in essa si faccia questa posizione diviene, dopo aver soppresso il fattore $e^{2\lambda_n t} - 1$.

$$(14) \qquad \frac{\varrho}{2}\lambda_n^2 \int_S (u_n^2 + v_n^2 + w_n^2)\, dS + \int_S W_n\, dS = -\frac{\varrho_1 \mu_n^2}{2}\int_\sigma \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu}\, d\sigma\,.$$

In essa W_n è il potenziale elastico unitario corrispondente allo spostamento $u_n\,,v_n\,,w_n$; il 1° membro è dunque l'energia totale iniziale del vibratore, ed è una quantità essenzialmente positiva.

Poniamo φ_n sotto forma di potenziale di spazio: tenendo conto della osservazione più volte fatta, che nel fluido vi è solo propagazione di onde all'esterno del vibratore, dovremo porre:

$$\varphi_n(Q) = \int_S F(P)\, \frac{e^{-\lambda_n \frac{r}{c}}}{r}\, dS\,.$$

All'esterno di S si ha:

$$\Delta \varphi_n = \frac{\lambda_n^2}{c^2}\, \varphi_n\,.$$

Sia σ, una superficie tutta esterna a S, S_1 lo spazio compreso tra σ e σ_1. Avremo:

$$\int_\sigma \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu}\, d\sigma = \int_{\sigma_1} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu_1}\, d\sigma_1 + \lambda_n^2 \int_{S_1} \varphi_n^2\, dS_1 + \int_{S_1} \Delta_1 \varphi_n\, dS_1\,.$$

La (14) diviene allora indicandone con E_0 il 1° membro:

$$E_0 + \frac{\varrho_1 \mu_n^2}{2}\left[\lambda_n^2 \int_{S_1} \varphi_n^2\, dS_1 + \int_{S_1} \Delta_1 \varphi_n\, dS_1 + \int_{\sigma_1} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu_1}\, dS_1\right] = 0\,.$$

Dovrà dunque essere qualunque sia la superficie σ_1:

$$K = \int_{\sigma_1} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu_1}\, d\sigma_1 < 0\,.$$

[1] H. Lamb, London Math. Soc. Proc., vol. 13, 1882.

Come superficie σ_1 assumiamo quella di una sfera di raggio R infinitamente grande. La φ_n all'infinito è asintotica a:

$$A \frac{e^{-\frac{\lambda_n}{c}R}}{R} \qquad \text{(A essendo una costante).}$$

La quantità K è dunque asintotica a:

$$A^2 \frac{e^{\frac{\lambda_n}{c}R}}{R} \left[\frac{\lambda_n}{c} \frac{e^{\frac{\lambda_n}{c}R}}{R} + \frac{e^{-\lambda_n \frac{R}{c}}}{R^2} \right] 4\pi R^2 .$$

Il segno di K al limite è perciò quello di:

$$A^2 \frac{\lambda_n}{c} \frac{e^{-2\frac{\lambda_n}{c}R}}{R} \cdot 4\pi R^2 .$$

Per l'osservazione prima fatta avremo dunque:

$$\lambda_n < 0 .$$

Gli unici moti aperiodici compatibili sono cioè smorzati.

4. Possiamo infine così riassumere i risultati di questa Nota:

In un corpo elastico isotropo immerso in un fluido perfetto, vibrante in virtù di uno stato di velocità e di una deformazione iniziale, possono sussistere solo delle vibrazioni armoniche smorzate e semplici e dei moti aperiodici smorzati, se il vibratore e il fluido non sono sollecitati da forze di massa.

Inoltre le vibrazioni armoniche semplici del vibratore non sono comunicate al fluido; esse dànno cioè tensioni nulle e spostamento normale nullo in superficie.

Ed anche: *L'equazione di frequenza relativa alle vibrazioni di un corpo elastico isotropo vibrante immerso in un fluido nella ipotesi di assenza di forze di massa, ha le sue radici complesse coniugate con parte reale negativa o nulla.*