ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

golare dello S_ν in cui $x_1 x_2 \dots x_\nu$ sono variabili reali, che non sia nè un iperpiano per l'origine nè un sistema di tali iperpiani.

4. Al precedente teorema si può dare varie forme, specialmente presentandolo come un teorema della teoria delle serie.

Osserviamo invero che il teorema di Weierstrass su citato ci dice pure che una serie di funzioni analitiche uniformemente convergente in un campo complesso si può derivare termine a termine quante volte si vuole. Applicando alle nostre serie tale teorema si vede subito che i coefficienti dei polinomii sono perfettamente determinati e coincidono coi noti coefficienti della serie di Taylor. Otterremo così:

1°). *Ogni serie di polinomii omogenei ordinata per gradi crescenti in ν variabili, convergente su una ipersuperficie $V_{\nu-1}$ dello S_ν in cui sono coordinate le variabili reali $x_1, x_2, \dots x_\nu$ — la quale non sia nè un iperpiano per l'origine nè un sistema di tali iperpiani — è la serie di Taylor di una funzione analitica.*

2°). *Due tali serie non possono avere la stessa somma su una $V_{\nu-1}$ del tipo descritto, senza essere identiche.*

3°). *Ogni tale serie — e quindi ogni serie di Taylor — si può integrare e derivare termine a termine quante volte si vuole in un intorno conveniente dell'origine.*

E infine poichè ogni funzione analitica regolare nell'origine si sviluppa in serie multipla di potenze:

4°). *Ogni tale serie converge uniformemente ed assolutamente in un conveniente intorno dell'origine e continua a godere di tale proprietà se si spezzano i polinomii nei loro singoli termini.*

Fisica matematica. — *Sui corpi di attrazione nulla.* Nota di Umberto Crudeli, presentata dal Socio P. Pizzetti.

In una Nota precedente [1] abbiamo trovato che, se ϱ_1 rappresenta una distribuzione di densità (limitata ed integrabile, per la quale, inoltre, valga la formula del Poisson) corrispondente ad una data azione esterna non nulla, l'espressione

$$\varrho_1 + \Delta^2(u s^2), \tag{1}$$

dove i simboli hanno i significati allora indicati, rappresenta la più generale distribuzione di densità (limitata ed integrabile, per la quale, inoltre, valga la formula del Poisson) corrispondente alla data azione esterna new-

[1] Rend. R. Accad. dei Lincei, ottobre 1912.

toniana. Abbiamo, poi, mostrato che, se ϱ_1 rappresenta una distribuzione di densità in un dato pianeta, la

$$(2) \qquad \varrho_1 + \Delta^2(vs^2) + \frac{\Delta^2(s^4)}{\int_\tau s^4\, d\tau} \left\{ \lambda - \int_\tau v\, s^2\, d\tau \right\}.$$

rappresenta [1] la più generale espressione della densità (limitata ed integrabile, per la quale, inoltre, sia valido il teorema del Poisson) corrispondente ad una data azione esterna e ad un dato moto rigido del pianeta intorno al suo baricentro (almeno escluso il caso allora indicato) intendendo assunti, come assi di riferimento, gli assi principali centrali (detti anche, senz'altro, principali) d'inerzia del pianeta stesso (corrispondenti alla data azione esterna). E, naturalmente, occorre aggiungere, trattandosi, per i pianeti, di densità positive, che l'arbitrarietà della v sia ulteriormente ristretta in modo che la (2) resulti positiva [2].

Qui desidero mostrare, anzitutto, come, supponendo ora che la ϱ_1 ammetta tutte le derivate che occorre considerare, si possa immediatamente

[1] Nella Nota precedente, al posto dell' s^2 che figura nell' $\int_\tau vs^2\, d\tau$, trovasi, per un evidente errore di stampa, un s^4.

[2] Che possano aversi, *in ogni caso* (pur intendendo positiva la ϱ_1) funzioni del tipo (2) tali che esistano punti in corrispondenza dei quali le funzioni stesse resultino negative, può mostrarsi così:

Si prenda

$$v = -\frac{\lambda s^2}{\int_\tau s^4\, d\tau}.$$

La (2) porge allora, come densità particolare,

$$\varrho_1 + \lambda \Delta^2(s^4)$$

E poichè, indicando con h una costante diversa da zero e con s_1 una funzione (indipendente da h) della stessa natura supposta per la s, è lecito intendere che la s sia della forma $s = hs_1$, avremo

$$\varrho_2 + \lambda h^4 \Delta^2(s^4{}_1).$$

Ora si osservi che $\Delta^2(s^4{}_1) \neq 0$ (giacchè, altrimenti, essendo $s_1 = 0$ sul contorno, sarebbe ovunque, nell'interno, $s_1 = 0$, mentre noi intendiamo che la s_1 sia diversa da zero in ogni punto interno del corpo) e si osservi, inoltre, che è anche lecito supporre $\lambda \neq 0$. Infine, si osservi che

$$\int_\tau \Delta^2(s^4{}_1)\, d\tau = 0.$$

Sicchè esisteranno punti in corrispondenza dei quali $\lambda\Delta^2(s^4{}_1)$ sarà negativo. E potremo intendere la costante h così grande che, in corrispondenza dei punti stessi, resulti negativa $\varrho_1 + \lambda h^4 \Delta^2(s^4{}_1)$.

estendere un resultato dovuto al prof. Lauricella, dimostrando che, **assegnata l'azione esterna, vi è sempre arbitrarietà nel distribuire la densità in modo che, sul contorno, la densità stessa e le sue derivate parziali, fino a quelle di un ordine finito qualsiasi, abbiano rispettivamente gli stessi valori della ϱ_1 e delle derivate parziali della ϱ_1 medesima.**

Infatti, nell'espressione generale della densità

$$\varrho_1 + \Delta^2(u\,s^2)$$

noi possiamo, al posto di s, sostituire s^n, indicando con n un qualsiasi numero intero, positivo, superiore od eguale al numero 2.

Per fissare le idee, prendiamo $n = 4$, e scriviamo

$$\varrho = \varrho_1 + \Delta^2(us^4) = \varrho_1 + u\Delta^2 s^4 + s^4\Delta^2 u + 2\,\Sigma\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial s^4}{\partial x} =$$

$$= \varrho_1 + 2us^2\left\{\Delta^2 s^2 + 4\,\Sigma\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2\right\} + s^4\Delta^2 u + 8\,s^3\,\Sigma\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial s}{\partial x}\,.$$

Ciò premesso, s'intenda che non soltanto la s ma anche le sue derivate, che occorrono, siano funzioni limitate nel campo τ. Allora, se prendiamo per u una *qualsiasi* funzione limitata, che ammetta, inoltre, le derivate, che occorre considerare, e se intendiamo che le derivate stesse siano pure limitate, avremo (tenendo presente come sul contorno $s = 0$) che la corrispondente ϱ e le sue derivate parziali del primo ordine avranno sul contorno stesso i valori rispettivamente della ϱ_1 e delle derivate parziali del primo ordine (che intendiamo ora esistenti) della ϱ_1 medesima.

E ormai si comprende ovviamente (e ne tralasciamo, perciò, la dimostrazione) come si possa stabilire il teorema generale enunciato.

Incidentalmente, poi, vogliamo osservare che, richiamando la nostra espressione generale della densità, si ricava immediatamente, e si rende valido per densità più generali di quelle considerate dal prof. Lauricella, il seguente notevole teorema (stabilito dallo stesso prof. Lauricella):

Condizione necessaria e sufficiente affinchè

$$\int_\tau \varrho\,\mathrm{U}\,d\tau$$

sia invariante rispetto alle densità corrispondenti ad un'assegnata azione esterna, è che la funzione U sia armonica.

Infatti, ponendo in esso $\varrho = \varrho_1 + \Delta^2(u\,s^2)$ e quindi tenendo presente che sul contorno $s = 0$, $\dfrac{ds^2}{dn} = 0$, avremo

$$\int_\tau \varrho\,\mathrm{U}\,d\tau = \int_\tau \varrho_1\,\mathrm{U}\,d\tau + \int_\tau \mathrm{U}\,\Delta^2(u\,s^2)\,d\tau = \int_\tau \varrho_1\,\mathrm{U}\,d\tau + \int_\tau u\,s^2\Delta^2\,\mathrm{U}\,d\tau\,.$$

Sicchè, data l'arbitrarietà della u, resulta immediatamente che, affinchè si abbia

$$\int_\tau \varrho \mathrm{U} d\tau = \int_\tau \varrho_1 \mathrm{U} d\tau$$

è necessario e sufficiente che sia $\Delta^2 \mathrm{U} = 0$.

Come pure, richiamando la nostra espressione generale della densità, resulta ovviamente il seguente teorema:

Data l'azione esterna di un corpo τ, resultano determinati la massa totale del corpo, il centro di massa del corpo stesso, gli assi principali di inerzia, e le differenze fra i momenti principali d'inerzia.

Matematica. — *Sopra le funzioni ordinatrici*. Nota di Filippo Sibirani, presentata dal Socio C. Somigliana.

1. Nella mia Nota *Sulle funzioni ordinatrici delle funzioni reali di una o più variabili reali* (1), ho definito come funzione ordinatrice di una funzione limitata e continua $f(x)$ in $a \dots b$ una funzione $\mathrm{O}f(x)$ continua, non decrescente (o non crescente), che prende in $a \dots b$ tutti e soli i valori di $f(x)$ e per la quale è

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \mathrm{O}f(x)\, dx .$$

Ivi ho introdotto anche le funzioni ordinatrici delle funzioni limitate e continue di più variabili rispetto al complesso delle variabili o rispetto ad alcune sole di esse.

Alcune semplici osservazioni permettono qui di provare che se una successione di funzioni continue di una o più variabili tende uniformemente ad una funzione continua, le funzioni ordinatrici corrispondenti tendono, pure uniformemente, alla funzione ordinatrice della funzione limite.

In una lettera indirizzata al prof. Somigliana e da questi riportata nella sua Nota, *Considerazioni sulle funzioni ordinate* (2), il prof. Volterra considera un processo di ordinamento per una funzione finita anche discontinua. Ma a me sembra che per certi tipi di funzioni discontinue non si possa introdurre il concetto di funzione ordinatrice se questa debba avere

(1) Rendic. della R. Accad. dei Lincei, vol. XX, ser. 5ª, pp. 694-701. Colgo l'occasione per notare due errori che mi sono sfuggiti nella revisione delle bozze della Nota citata. A pag. 698, linea 6ª dal basso, anzichè $\chi(x)$, devesi leggere $\mathrm{O}\chi(x)$; e alla pag. 699, linea 5ª, anzichè $x_{\left(\mathrm{A}-\frac{\sigma}{4}\right)-0} - x_0$, si deve leggere $x_{\left(\mathrm{A}+\frac{\sigma}{4}\right)-0} - x_0$.

(2) Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. VIII, serie 5ª, pp. 125-135.