ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Sicchè, data l'arbitrarietà della u, resulta immediatamente che, affinchè si abbia

$$\int_\tau \varrho \mathrm{U} d\tau = \int_\tau \varrho_1 \mathrm{U} d\tau$$

è necessario e sufficiente che sia $\Delta^2 \mathrm{U} = 0$.

Come pure, richiamando la nostra espressione generale della densità, resulta ovviamente il seguente teorema:

Data l'azione esterna di un corpo τ, resultano determinati la massa totale del corpo, il centro di massa del corpo stesso, gli assi principali di inerzia, e le differenze fra i momenti principali d'inerzia.

Matematica. — *Sopra le funzioni ordinatrici*. Nota di Filippo Sibirani, presentata dal Socio C. Somigliana.

1. Nella mia Nota *Sulle funzioni ordinatrici delle funzioni reali di una o più variabili reali* (¹), ho definito come funzione ordinatrice di una funzione limitata e continua $f(x)$ in $a \dots b$ una funzione $\mathrm{O}f(x)$ continua, non decrescente (o non crescente), che prende in $a \dots b$ tutti e soli i valori di $f(x)$ e per la quale è

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \mathrm{O}f(x)\, dx .$$

Ivi ho introdotto anche le funzioni ordinatrici delle funzioni limitate e continue di più variabili rispetto al complesso delle variabili o rispetto ad alcune sole di esse.

Alcune semplici osservazioni permettono qui di provare che se una successione di funzioni continue di una o più variabili tende uniformemente ad una funzione continua, le funzioni ordinatrici corrispondenti tendono, pure uniformemente, alla funzione ordinatrice della funzione limite.

In una lettera indirizzata al prof. Somigliana e da questi riportata nella sua Nota, *Considerazioni sulle funzioni ordinate* (²), il prof. Volterra considera un processo di ordinamento per una funzione finita anche discontinua. Ma a me sembra che per certi tipi di funzioni discontinue non si possa introdurre il concetto di funzione ordinatrice se questa debba avere

(¹) Rendic della R. Accad. dei Lincei, vol. XX, ser. 5ª, pp. 694-701. Colgo l'occasione per notare due errori che mi sono sfuggiti nella revisione delle bozze della Nota citata. A pag. 698, linea 6ª dal basso, anzichè $\chi(x)$, devesi leggere $\mathrm{O}\chi(x)$; e alla pag. 699, linea 5ª, anzichè $x_{\left(\mathrm{A}-\frac{\sigma}{4}\right)-0} - x_0$, si deve leggere $x_{\left(\mathrm{A}+\frac{\sigma}{4}\right)-0} - x_0$.

(²) Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. VIII, serie 5ª, pp. 125-135.

tutti e soli i valori della data funzione e se, ammessa per quest'ultima l'integrabilità, gli integrali estesi al comune intervallo di definizione debbano essere uguali: nel n. 5 indico un siffatto tipo di funzioni.

2. Dette $l_A^{(f)}$, $\lambda_A^{(f)}$, $L_A^{(f)}$ le misure degli insiemi di punti in cui $f(x)$ è in $a \dots b$ rispettivamente minore, uguale e maggiore di A, numero compreso fra il minimo μ ed il massimo M di $f(x)$, la funzione $Of(x)$ è la funzione che in $x = a + l_A^{(f)}$, in $x = a + l_A^{(f)} + \lambda_A^{(f)} = b - L_A^{(f)}$, e nei punti intermedî, ha il valore A, quando si faccia assumere ad A tutti i valori compresi fra μ ed M.

Sia data una successione di funzioni limitate e continue in $a \dots b$,

$$f_1(x)\,,\, f_2(x)\,, \dots ,\, f_n(x)\,, \dots \tag{1}$$

che tendono uniformemente ad una funzione continua $F(x)$.

Si costruiscano delle (1) le funzioni ordinatrici

$$Of_1(x)\,,\, Of_2(x)\,, \dots ,\, Of_n(x)\,, \dots\,; \tag{2}$$

vogliamo provare che codeste funzioni tendono, pure uniformemente, ad $OF(x)$, funzione ordinatrice di $F(x)$.

Poniamo, per brevità,

$$a + l_A^{(f_n)} = x_{A-0}^{(f_n)}$$

$$a + l_A^{(f_n)} + \lambda_A^{(f_n)} = x_{A+0}^{(f_n)}\,.$$

Per la convergenza uniforme delle (1) alla $F(x)$, prefissato un numero σ piccolo a piacere, esisterà un indice ν tale che, per ogni $n > \nu$ e qualunque sia x di $a \dots b$,

$$F(x) - \sigma < f_n(x) < F(x) + \sigma\,.$$

Allora, se μ è il minimo ed M il massimo di $F(x)$, per qualunque valore A compreso fra $\mu - \sigma$ e $M + \sigma$, sarà

$$x_{A-0}^{(F+\sigma)} < x_{A-0}^{(f_n)} < x_{A-0}^{(F-\sigma)}$$

$$x_{A+0}^{(F+\sigma)} < x_{A+0}^{(f_n)} < x_{A+0}^{F-\sigma}\,.$$

Ma poichè le funzioni ordinatrici sono non decrescenti, dalle precedenti disuguaglianze si deduce

$$O[F(x) - \sigma] < Of_n(x) < O[F(x) + \sigma]\,.$$

D'altra parte, per essere

$$x_{A-0}^{(F+\sigma)} = x_{(A-\sigma)-0}^{(F)} \quad , \quad x_{A+0}^{(F+\sigma)} = x_{(A-\sigma)+0}^{(F)} ,$$

$$x_{A-0}^{(F-\sigma)} = x_{(A+\sigma)-0}^{(F)} \quad , \quad x_{A+0}^{(F-\sigma)} = x_{(A+\sigma)+0}^{(F)} ,$$

si trae

$$O[F(x) \pm \sigma] = OF(x) \pm \sigma ;$$

quindi

$$OF(x) - \sigma \leq Of_n(x) \leq OF(x) + \sigma$$

per ogni $n > \nu$ in tutto $a \dots b$; ciò che dimostra, come ci eravamo proposti, il teorema:

Le funzioni ordinatrici di una successione di funzioni limitate continue che tendono uniformemente alla funzione continua $F(x)$, *tendono, pure uniformemente, alla funzione ordinatrice di* $F(x)$.

3. Siano

(3) $$f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_n(x, y), \dots$$

infinite funzioni limitate e continue nello stesso campo quadrabile $\varDelta$, le quali tendano uniformemente alla funzione continua $F(x, y)$.

Se d è un asse per l'origine degli assi cartesiani, nel 1° e 3° quadrante, sul quale la direzione positiva sia quella che con la direzione positiva dell'asse x forma un angolo acuto, ogni retta r normale a d e che abbia qualche punto in comune con $\varDelta$, dà luogo, insieme con la parte del contorno di $\varDelta$ che rispetto ad r sta dalla banda negativa di d, ad uno o più pezzi di $\varDelta$, la somma delle cui aree in valore assoluto è determinata.

Se A è un numero compreso fra il minimo μ_n ed il massimo M_n di $f_n(x, y)$ in $\varDelta$, siano $g_A^{(f_n)}$, $\gamma_A^{(f_n)}$, $G_A^{(f_n)}$ le misure superficiali degli insiemi dei punti in cui $f_n(x, y)$ è minore di A, uguale ad A, o maggiore di A.

Sia $r_A^{(f_n)}$ la retta normale a d che con la parte anzidetta del contorno di $\varDelta$ limita un'area misurata da $g_A^{(f_n)}$. Definiamo in $\varDelta$ una funzione che sui punti di $r_A^{(f_n)}$ appartenenti a $\varDelta$ ha il valore A e, se $\gamma_A^{(f_n)} \neq 0$, ha il valore A anche nella porzione di $\varDelta$ (e suo contorno) limitata da $r_A^{(f_n)}$ e da quella parallela che con la precedente e con il contorno di $\varDelta$ forma l'area $\gamma_A^{(f_n)}$. Al variare di A fra μ_n e M_n, si ottiene una funzione $Of(x, y)$ continua in $\varDelta$, crescente secondo la direzione degli assi, che prende tutti e soli i valori di $f_n(x, y)$ e per la quale è

$$\int_\varDelta f_n(x, y)\, dx\, dy = \int_\varDelta Of_n(x, y)\, dx\, dy .$$

Codesta funzione è una funzione ordinatrice di $f_n(x, y)$ rispetto ad entrambe le variabili.

Orbene, sussiste il teorema:

La successione delle funzioni ordinatrici delle (3) *è convergente in egual grado alla funzione ordinatrice di* $\mathrm{F}(x, y)$, *quando, ben inteso, per tutte le funzioni* (3) *e per la* $\mathrm{F}(x, y)$ *si conserva la stessa direzione* d.

Per la convergenza uniforme delle (3), prefissato un numero σ piccolo a piacere, per ogni n maggiore di un determinato indice ν, sarà, in tutto Δ,

$$\mathrm{F}(x, y) - \sigma < f_n(x, y) < \mathrm{F}(x, y) + \sigma . \tag{4}$$

Essendo μ il minimo ed M il massimo di $\mathrm{F}(x, y)$ in Δ, per un qualsivoglia valore A compreso fra $\mu - \sigma$ e $\mathrm{M} + \sigma$, sarà, ponendo per brevità $g + \gamma = \Gamma$,

$$g_{\mathrm{A}}^{(\mathrm{F}+\sigma)} < g_{\mathrm{A}}^{(f_n)} < g_{\mathrm{A}}^{(\mathrm{F}-\sigma)}$$

$$\Gamma_{\mathrm{A}}^{(\mathrm{F}+\sigma)} < \Gamma_{\mathrm{A}}^{(f_n)} < \Gamma_{\mathrm{A}}^{(\mathrm{F}-\sigma)} .$$

Per la costanza delle funzioni ordinatrici sulle rette normali a d, e per il modo della loro crescenza, dalle disuguaglianze precedenti si deduce che

$$\mathrm{O}[\mathrm{F}(x, y) - \sigma] < \mathrm{O} f_n(x, y) < \mathrm{O}[\mathrm{F}(x, y) + \sigma] .$$

D'altra parte, poichè

$$g_{\mathrm{A}}^{(\mathrm{F}+\sigma)} = g_{\mathrm{A}-\sigma}^{(\mathrm{F})} \quad ; \quad g_{\mathrm{A}}^{(\mathrm{F}-\sigma)} = g_{\mathrm{A}+\sigma}^{(\mathrm{F})}$$

$$\Gamma_{\mathrm{A}}^{(\mathrm{F}+\sigma)} = \Gamma_{\mathrm{A}-\sigma}^{(\mathrm{F})} \quad ; \quad \Gamma_{\mathrm{A}}^{(\mathrm{F}-\sigma)} = g_{\mathrm{A}+\sigma}^{(\mathrm{F})} ,$$

si trae

$$\mathrm{O}[\mathrm{F}(x, y) \pm \sigma] = \mathrm{OF}(x, y) \pm \sigma .$$

Sarà allora, per ogni $n > \nu$ e in tutto Δ,

$$\mathrm{OF}(x, y) - \sigma < \mathrm{O} f_n(x) < \mathrm{OF}(x, y) + \sigma ,$$

ciò che dimostra il teorema.

Come ho osservato nella mia citata Nota, alle rette normali a d si possono sostituire curve di convenienti famiglie.

4. Il campo Δ sia limitato da due curve di equazioni $x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$, con $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ funzioni continue, ad un valore, in $a \dots b$, essendo a e b le ordinate minima e massima del contorno stesso: il contorno può, eventualmente, oltre le due curve, comprendere due segmenti sulle rette $y = a$, $y = b$.

Data in Δ una funzione $f(x, y)$, e fissato per y un valore $\bar{y}$, si può costruire di $f(x, \bar{y})$, funzione della sola x, la funzione ordinatrice. Se altrettanto si fa per ogni y compreso fra a e b, si ha una funzione, che indicheremo con $O_x f(x, y)$, continua, che prende tutti e soli i valori di $f(x, y)$, cresce secondo la direzione positiva dell'asse x, e soddisfa alle relazioni

$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} O_x f(x, y)\, dx \;;$$

$$\int_\Delta f(x, y)\, dx\, dy = \int_\Delta O_x(x, y)\, dx\, dy\,.$$

La $O_x f(x, y)$ dicesi « funzione ordinatrice » di $f(x, y)$ rispetto ad x.

Sussiste il teorema:

Se le funzioni

(5) $$f_1(x, y), f_2(x, y), \dots f_n(x, y), \dots$$

tendono ad una funzione continua $F(x, y)$ *in tal guisa che la successione delle stesse funzioni in cui si sia fatto* $y = \bar{y}$ *(con* $\bar{y}$ *qualunque, compreso fra a e b) tenda uniformemente ad* $F(x, \bar{y})$, *allora la successione*

(6) $$O_x f_1(x, y), O_x f_2(x, y), \dots, O_x f_n(x, y), \dots$$

tende a $O_x F(x, y)$ *in guisa, che ogni successione che si ottiene da* (6) *mettendo* $y = \bar{y}$, *tende uniformemente a* $O_x F(x, \bar{y})$.

Basta ripetere la dimostraztone del num. 2, una volta fatta, nelle (5), $y = \bar{y}$.

Ed ancora vale la proposizione:

Se le (5) *tendono uniformemente a* $F(x, y)$, *le* (6) *tendono uniformemente a* $O_x F(x, y)$.

Pel teorema precedente, se per ogni $n > \nu$ è

$$F(x, \bar{y}) - \sigma < f_n(x, \bar{y}) < F(x, \bar{y}) + \sigma,$$

si deduce

(7) $$OF(x, \bar{y}) - \sigma < Of_n(x, \bar{y}) < OF(x, \bar{y}) + \sigma;$$

dove ν dipende da $\bar{y}$. Ma se le (5) tendono uniformemente a $F(x, y)$, per tutti i punti di Δ v'ha un numero ν tale che, per $n > \nu$, è verificata la (4); epperò la (7) vale per qualunque $\bar{y}$ compreso fra a e b: è quanto dire che, in tutto Δ,

$$O_x F(x, y) - \sigma < Of_n(x, y) < OF(x, y) + \sigma;$$

ciò che dimostra il teorema.

5. Nell'intervallo $a \dots b$ sia $f(x)$ costantemente uguale ad A, tranne che in due punti x', x'' in cui assume i valori A', A'', entrambi maggiori

di A. La funzione ordinatrice di $f(x)$, se esiste, deve essere non decrescente: epperò il punto od i punti in cui essa assume il valore A′ debbono seguire tutti quelli in cui prende il valore A, ed il punto od i punti in cui assume il valore A″ (maggiore di A′) seguire immediatamente quelli in cui prende il valore A′. D'altra parte, poichè $\int_a^b f(x)\,dx = A(b-a)$, nè mai $f(x) < A$, i punti in cui $Of(x)$ prende i valori A′ e A″ devono costituire un insieme di misura nulla. Ma una siffatta funzione non è definibile, giacchè sarebbe quanto dire che la funzione ordinatrice in b deve avere il valore A″, e, nel punto *immediatamente precedente*, il valore A′. La stessa cosa si può ripetere se $f(x)$ è costantemente uguale ad A, tranne che in un numero finito (>2) di punti o in un numero infinito di punti costituenti un gruppo di misura nulla, nei quali $f(x)$ assume valori diversi da A.

Osserviamo che se i valori assunti da $f(x)$, maggiori di A, si possono ordinare in una successione crescente (o decrescente) $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ si può definire una funzione $F(x)$ non decrescente che prende tutti e soli i valori di $f(x)$ il cui integrale esteso ad $a \ldots b$ differisce da quello esteso allo stesso intervallo di $f(x)$ per una quantità η, prefissata piccola a piacere.

Se M è un numero non superato da $f(x)$, sia δ un numero tale che $(M-A)\,\delta = \eta$: allora si consideri la funzione $F(x)$ che in $a \ldots b-\delta$ è uguale ad A; in $b-\delta \ldots b-\frac{\delta}{2}$ è uguale ad A_1; in $b-\frac{\delta}{2} \ldots b-\frac{\delta}{3}$ è uguale ad A_2, e così, in generale, fra $b-\frac{\delta}{n}$ e $b-\frac{\delta}{n+1}$ è uguale ad A_n. La funzione $F(x)$ prende tutti e soli i valori di $f(x)$, è non decrescente ed il suo integrale esteso ad $a \ldots b$ è

$$(b-a-\delta)\,A + \delta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n(n+1)} < (b-a)\,A + \\ + \delta\left(-A + M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}\right) = \\ = (b-a)\,A + (M-A)\,\delta = (b-a)\,A + \eta,$$

mentre quello di $f(x)$, esteso allo stesso intervallo, è manifestamente $(b-a)\,A$.