ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Matematica. — *Sulle funzioni permutabili di seconda specie.* Nota III di LUIGI SINIGALLIA, presentata dal Corrisp. G. LAURICELLA.

1. In due Note precedenti [1] mi sono occupato della determinazione delle funzioni permutabili con una funzione data, quando questa è la somma di un numero finito di prodotti di una funzione della sola x per un'altra funzione della sola y. Lo stesso problema fu contemporaneamente risoluto dal prof. Volterra [2] il quale fece vedere come esso possa, almeno nel caso generale, ridursi a quello della determinazione delle sostituzioni lineari permutabili con una sostituzione data. Ora mi propongo non solo di mostrare l'accordo di tale risultato del prof. Volterra con quello già da me stabilito ma anche di far vedere, applicando la teoria delle forme algebriche bilineari di Frobenius [3] come le funzioni chieste nel caso generale si esprimano per mezzo dei nuclei iterati del nucleo dato. Comincio qui coll'occuparmi di questi nuclei iterati, fra i quali sussisteranno le stesse relazioni che esistono fra le potenze delle forme bilineari, riserbandomi di trattare in una Nota successiva delle funzioni permutabili del nucleo dato.

I. — I NUCLEI ITERATI.

2. Se la funzione $F(x, y)$ è definita nel campo $(a \leqq x \leqq b\ ,\ a \leqq y \leqq b)$ la funzione

$$F_k(x\,,\,y) = \int_a^b F_{k-1}(x\,,\,s)\,F(s\,,\,y)\,ds \qquad (k = 2\,,\,3\,,\,...)$$

quando si prenda $F_1(x\,,\,y) = F(x\,,\,y)$, dicesi *nucleo iterato* di ordine k del nucleo dato $F(x\,,\,y)$. Supponiamo che il nucleo dato $F(x\,,\,y)$ sia uguale alla somma di un numero finito di prodotti di una funzione della sola x per un'altra funzione della sola y, di guisa che se $\varphi_r(x)$, $\psi_r(y)$ costituiscono il sistema ortogonale completo della $F(x\,,\,y)$ si abbia

$$(1) \qquad F(x\,,\,y) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\varphi_r(x)\,\psi_r(x)}{\lambda_r}\,.$$

[1] Sinigallia, *Sulle funzioni permutabili di seconda specie*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, Nota I (ser. 5ª, vol. XX, 1° sem. 1911); Nota II (ser. 5ª, vol. XX, 2° sem. 1911).

[2] Volterra, *Sopra le funzioni permutabili di 2ª speice e le equazioni integrali* (Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, ser. 5ª, vol. XX, 1° sem. 1911).

[3] Frobenius, *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* (Journal für d. r. u. a Mathematik, Bd. 84 (1878); Encyclopédie des sciences mathématiques (édition françaises), tom. I, vol. 2, fasc. 4, pag. 440 e seg.

Ponendo ora

$$A_{i,h} = \int_a^b \varphi_i(s)\, \psi_h(s)\, ds\,,$$

sarà

$$F_2(x\,,y) = \sum_{i,h=1}^{n} \frac{A_{h,i}}{\lambda_i\, \lambda_h}\, \varphi_i(x)\, \psi_h(y)\,;$$

ed in generale se

$$A_{i,h}^{(1)} = \begin{cases} \lambda_i & \text{se } i = h \\ 0 & \text{se } i \neq h \end{cases} \quad ; \quad A_{i,h}^{(2)} = A_{i,h}$$

(2)

$$A_{i,h}^{(k)} = \sum_{r=1}^{n} \frac{A_{ir}\, A_{rh}^{(k-1)}}{\lambda_r} \qquad (k = 1\,, 2\,, \ldots)$$

avremo

(3)
$$F_k(x\,,y) = \sum_{i,h=1}^{n} \frac{A_{hi}^{(k)}}{\lambda_i\, \lambda_h}\, \varphi_i(x)\, \psi_h(y) \qquad (k = 1\,, 2\,, \ldots).$$

3. Se ora consideriamo il nucleo $F_2(x\,,y)$ come una forma bilineare coi coefficienti $\frac{A_{hi}}{\lambda_h}$ e le variabili $\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}$, $\psi_h(y)$, per le (2) il nucleo $F_k(x\,,y)$ sarà la potenza $(k-1)^{ma}$ (secondo Frobenius) del nucleo $F_2(x\,,y)$. Perciò la successione dei nuclei $F_2\,, F_3\,, \ldots$ condurrà certamente ad un nucleo che sarà una combinazione lineare omogenea a coefficienti costanti di tutti i nuclei precedenti. Se $F_p(x\,,y)$ è il nucleo del minimo ordine che gode di tale proprietà, avremo

(4)
$$a_1\, F(x\,,y) + a_2\, F_2(x\,,y) + \cdots + a_p\, F_p(x\,,y) = 0\,,$$

essendo le a delle costanti ed $a_p \neq 0$. La (4) si dirà *l'equazione del minimo ordine* cui soddisfa il nucleo $F(x\,,y)$. Dalla (4) qualunque sia il numero intero positivo r si deduce

$$a_1\, F_{r+1}(x\,,y) + a_2\, F_{r+2}(x\,,y) + \cdots + a_p\, F_{r+p}(x\,,y) = 0$$

cioè ogni nucleo di ordine maggiore di p è pure una combinazione lineare omogenea a coefficienti costanti di $F_1\,, F_2\,, \ldots F_{p-1}$.

L'*equazione caratteristica* del nucleo $F_2(x, y)$ sarà

$$\Omega(s) = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{\lambda_1} - s, & \frac{A_{21}}{\lambda_2} & , \dots & \frac{A_{n1}}{\lambda_n} \\ \frac{A_{12}}{\lambda_1} & , \frac{A_{22}}{\lambda_2} - s, & \dots & \frac{A_{n2}}{\lambda_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{\lambda_1} & , \frac{A_{2n}}{\lambda_2} & , \dots & \frac{A_{nn}}{\lambda_n} - s \end{vmatrix} =$$

$$= b_1 + b_2 s + b_3 s^2 + \cdots + b_{n+1} s^n = 0 .$$

E se $\chi(s)$ è il massimo comun divisore di tutti i minori di ordine $n-1$ del determinante $\Omega(s)$ e

$$\theta(s) = \frac{\Omega(s)}{\chi(s)} = a_1 + a_2 s + a_3 s^2 + \cdots + a_p s^{p-1}$$

l'equazione del minimo ordine cui soddisfa il nucleo $F(x, y)$ sarà appunto la (4).

Invece, se i divisori elementari del determinante $\Omega(s)$ sono potenze di basi tutte diverse fra loro sarà $\chi(s) = 1$ e $\theta(s) = \Omega(s)$. Inversamente se $\theta(s) = \Omega(s)$ sarà $\chi(s) = 1$ ed i divisori elementari del determinante $\Omega(s)$ saranno potenze di basi tutte diverse fra loro.

Dunque *la condizione necessaria e sufficiente perchè*

$$b_1 F(x, y) + b_2 F_2(x, y) + \cdots + b_{n+1} F_{n+1}(x, y) = 0$$

sia l'equazione del minimo ordine cui soddisfa il nucleo $F(x, y)$ *è che i divisori elementari del determinante* $\Omega(s)$ *siano potenze di basi tutte diverse fra loro.* Quando ciò accade (e soltanto in questo caso) i nuclei $F_1, F_2, \dots F_n$ saranno tutti linearmente fra loro indipendenti ed i nuclei iterati di tutti gli altri ordini saranno delle loro combinazioni lineari omogenee a coefficienti costanti.

4. Però quando il determinante

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{nn} \end{vmatrix}$$

è nullo ed ha la caratteristica q, l'equazione del minimo ordine cui soddisfa il nucleo dato non può avere ordine maggiore di $q + 2$. Infatti se

$$(5) \qquad A_{q+i,h} = \sum_{r=1}^{q} \mu_{r,i} A_{r,h} \qquad (i = 1, \dots n - q \; ; \; h = 1, \dots n) ;$$

ponendo

$$(6) \qquad \varphi_i^{(1)}(x) = \sum_{r=1}^{n} \frac{A_{ir}}{\lambda_r} \varphi_r(x) \quad ; \quad \psi_i^{(1)}(y) = \frac{\psi_i(y)}{\lambda_i} + \sum_{r=1}^{n-q} \frac{\mu_{ir}}{\lambda_{q+r}} \psi_{q+r}(y) ,$$

avremo

$$F_2(x , y) = \sum_{i=1}^{q} \varphi_i^{(1)}(x) \psi_i^{(1)}(y) ,$$

e le $\varphi_i^{(1)}(x)$ saranno fra loro linearmente indipendenti e così pure le $\psi_i^{(1)}(y)$. Quindi, se

$$B_{i,h}^{(3)} = \int_a^b \varphi_i(s) \psi_h^{(1)}(s) \, ds = \frac{A_{i,h}}{\lambda_h} + \sum_{r=1}^{n-q} \frac{\mu_{hr}}{\lambda_{q-r}} A_{i,q+r}$$

$$(i = 1 , \dots n \; ; \; h = 1 , \dots q) ,$$

poichè, per le (5),

$$B_{q+i,h}^{(3)} = \sum_{r=1}^{q} \mu_{r,i} B_{r,h}^{(3)} \qquad (i = 1 , \dots n - q \; ; \; h = 1 , \dots q) ,$$

avremo

$$F_3(x , y) = \sum_{i,h=1}^{q} B_{h,i}^{(3)} \varphi_i^{(1)}(x) \psi_h^{(1)}(y) .$$

Ora anche il determinante $|B_{i,h}^{(3)}|$ potrebbe essere nullo: perciò supponiamo in generale che le costanti $B_{i,h}^{(r)}$ siano determinate dalle formole

$$(7) \quad \begin{cases} B_{i,h}^{(2)} = \dfrac{A_{i,h}}{\lambda_h} \; ; \\ B_{i,h}^{(r)} = \displaystyle\int_a^b \varphi_i(s) \psi_h^{(r-2)}(s) \, ds = B_{i,h}^{(r-1)} + \sum_{s=1}^{q_{r-4}-q_{r-3}} \mu_{hs}^{(r-3)} B_{i,q_{r-3}+s}^{(r-1)} \\ (i = 1 , \dots n \; ; \; h = 1 , \dots q_{r-3} \; ; \; r = 3 , 4 , \dots k) , \end{cases}$$

essendo le $\mu_{i,h}^{(r)}$ delle costanti e $q_{-1} = n$; $q_0 = q$; $\mu_{i,h}^{(0)} = \mu_{i,h}$. Supponiamo ancora che il determinante

$$\begin{vmatrix} B_{11}^{(r)} & \dots & B_{1,q_{r-3}}^{(r)} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{q_{r-3},1} & \dots & B_{q_{r-3},q_{r-3}} \end{vmatrix} \qquad (r = 2 , 3 , \dots k - 1)$$

sia nullo ed abbia la caratteristica q_{r-2}, sicchè

$$\mathrm{B}^{(r)}_{q_{r-2}+i,h} = \sum_{s=1}^{q_{r-2}} \mu^{(r-2)}_{s,i}\, \mathrm{B}^{(r}_{s,h} \tag{8}$$

$$(i = 1, \dots q_{r-3} - q_{r-2}\ ;\ h = 1, \dots q_{r-3}\ ;\ r = 2, 3, \dots k-1)$$

e che le funzioni $\varphi_i^{(r)}(x)$, $\psi_i^{(r)}(y)$ siano definite dalle relazioni

$$\left\{\begin{aligned} & \varphi_i^{(0)}(x) = \varphi_i(x) \quad ; \quad \psi_i^{(0)}(y) = \frac{1}{\lambda_i}\psi_i(y) \\ & \varphi_i^{(r)}(x) = \sum_{s=1}^{q_{r-2}} \mathrm{B}^{(r+1)}_{i,s}\, \varphi_s^{(r-1)}(x) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \dots q_{r-1} \\ r = 1, \dots k-2 \end{pmatrix} \\ & \psi_i^{(r)}(y) = \psi_i^{(r-1)}(y) + \sum_{s=1}^{q_{r-2}-q_{r-1}} \mu^{(r-1)}_{i,s}\, \psi^{(r-1}_{q+s}(y)\,. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Dalle formole precedenti segue subito che, se

$$\begin{aligned} & \mu^{(r,0)}_{i,h} = \mu^{(r)}_{i,h} \\ & \mu^{(r,\tau+1)}_{i,h} = \mu^{(r-1,\tau)}_{i,h} + \sum_{s=1}^{q_{r-1}-q_r} \mu^{(r)}_{i,s}\, \mu^{(r-1,\tau)}_{q_r+s,h}\,, \end{aligned} \tag{10}$$

si ha

$$\psi_i^{(r)}(y) = \frac{1}{\lambda_i}\psi_i(y) + \sum_{\sigma=0}^{r=1} \sum_{\tau=1}^{q_{\sigma-1}-q_\sigma} \frac{\mu^{(r-1,r-\sigma-1)}_{i,\tau}}{\lambda_{q_\sigma+\tau}}\, \psi_{q_\sigma+\tau}(y)\,. \tag{11}$$

Infatti la (11) per $r = 1$ coincide con la seconda delle (6). Inoltre supposta vera la (11) per un valore di r per le (9), (11) avremo

$$\psi_i^{(r+1)}(y) = \frac{\psi_i(y)}{\lambda_i} + \sum_{\tau=1}^{q_{r-1}-q_r} \frac{\mu^{(r,0)}_{i,\tau}}{\lambda_{q_r+\tau}}\, \psi_{q_r+\tau}(y) +$$

$$+ \sum_{\sigma=0}^{r-1} \sum_{\tau=1}^{q_{\sigma-1}-q_\sigma} \frac{1}{\lambda_{q_\sigma+\tau}} \left(\mu^{(r-1,r-\sigma-1)}_{i,\tau} + \sum_{s=1}^{q_{r-1}-q_r} \mu^{(r)}_{i,s}\, \mu^{(r-1,r-\sigma-1)}_{q_r+s,\tau} \right) \psi_{q_\sigma+\tau}(y)$$

e per la (10)

$$\psi_i^{(r+1)} = \frac{1}{\lambda_i}\psi_i(y) + \sum_{\sigma=0}^{r} \sum_{\tau=1}^{q_{\sigma-1}-q_\sigma} \frac{\mu^{(r,r-\sigma)}_{i,\tau}}{\lambda_{q_\sigma+\tau}}\, \psi_{q_\sigma+\tau}(y)\,,$$

cioè la (11) sussiste anche per $r+1$.

Segue anche dalle formole precedenti che

$$\text{(12)} \qquad B^{(r+3)}_{q_{r-\tau}+i,h} = \sum_{s=1}^{q_r} \mu^{(r,\tau)}_{s,i} \, B^{(r+3)}_{s,h}$$

$(i = 1, \dots q_{r-\tau-1} - q_{r-\tau}\,;\; h = 1, \dots q_r\,;\; \tau = 0, 1, \dots \nu\,;\; r = \tau + 1, \dots k - 4)$.

Infatti per le (7), (8) si ha

$$B^{(r+3)}_{q_r+i,h} = \sum_{s=1}^{q_r} \mu^{(r)}_{s,i} \left\{ B^{(r+2)}_{s,h} + \sum_{\sigma=1}^{q_{r-1}-q_r} \mu^{(r)}_{h\sigma} B^{(r+2)}_{s,q_r+\sigma} \right\},$$

e quindi

$$\text{(12')} \qquad B^{(r+3)}_{q_r+i,h} = \sum_{s=1}^{q_r} \mu^{(r,0)}_{s,i} \, B^{(r+3)}_{s,h} \,,$$

cioè la (12) sussiste per $\tau = 0$. E supposta vera la (12) pel valore τ poichè per le (7), (12)

$$B^{(r+3)}_{q_{r-\tau-1}+i,h} = \sum_{s=1}^{q_{r-1}} \mu^{(r-1,\tau)}_{s,i} \left\{ B^{(r+2)}_{s,h} + \sum_{\sigma=1}^{q_{r-1}-q_r} \mu^{(r)}_{h\sigma} \, B^{(r+2)}_{s,q_r+\sigma} \right\} =$$

$$= \sum_{s=1}^{q_{r-1}} \mu^{(r-1,\tau)}_{s,i} \, B^{(r+3)}_{s,h} \,,$$

avremo per le (12'), (10)

$$B^{(r+3)}_{q_{r-\tau-1}+i,h} = \sum_{s=1}^{q_r} \left\{ \mu^{(r-1,\tau)}_{s,i} + \sum_{\sigma=1}^{q_{r-1}-q_r} \mu^{(r)}_{s,\sigma} \, \mu^{(r-1,\tau)}_{q_r+\sigma,i} \right\} B^{(r+3)}_{s,h} =$$

$$= \sum_{s=1}^{q_r} \mu^{(r,\tau+1)}_{s,i} \, B^{(r+3)}_{s,h} \,,$$

cioè la (12) è vera anche per $\tau + 1$.

Posto ciò se

$$F_r(x, y) = \sum_{i,h=1}^{q_{r-2}} B^{(r)}_{h,i} \, \varphi^{(r-2)}_i(x) \, \psi^{(r-2)}_h(y) \quad (r = 2, 3, \dots k - 1),$$

e quindi

$$\text{(13)} \qquad F_{k-1}(x, y) = \sum_{i,h=1}^{q_{k-4}} B^{(k-1)}_{h,i} \, \varphi^{(k-3)}_i(x) \, \psi^{(k-3)}_h(y) \,,$$

poichè le $B_{i,h}^{(k-1)}$ soddisfanno alle (8), avremo per le (9)

$$F_{k-1}(x\,,y) = \sum_{i,h=1}^{q_{k-3}} \varphi_i^{(k-2)}(x)\,\psi_i^{(k-2)}(y)\,; \tag{14}$$

donde per l'ultima delle (7)

$$F_k(x\,,y) = \sum_{i=1}^{q_{k-3}} \sum_{h=1}^{n} \frac{B_{hi}^{(k)}}{\lambda_h}\,\varphi_i^{(k-2)}(x)\,\psi_h(y)\,.$$

Perciò tenendo conto della (12)

$$F_k(x\,,y) = \sum_{i,h=1}^{q_{k-3}} B_{hi}^{(k)}\,\varphi_i^{(k-2)}(x) \left\{ \frac{\psi_h(y)}{\lambda_h} + \sum_{r=0}^{k-3} \sum_{s=1}^{q_{r-1}-q_r} \frac{\mu_{h,s}^{(k-3,k-r-3)}}{\lambda_{q_r+s}}\,\psi_{q_r+s}(y) \right\},$$

e per la (11)

$$F_k(x\,,y) = \sum_{i,h=1}^{q_{k-3}} B_{h,i}^{(k)}\,\varphi_i^{(k-2)}(x)\,\psi_h^{(k-2)}(y)\,. \tag{15}$$

Chimica. — *Sui solfoalluminati d'argento* [1]. Nota di Livio Cambi, presentata dal Socio R. Nasini.

Le ricerche che comunico sui solfoalluminati sono in relazione con quelle da me iniziate sui solfosilicati, che ho già in parte reso note [2].

Lo studio di questi solfosali interessa per le conoscenze sul comportamento, come solfoanidridi, dei solfuri di silicio e di alluminio; comportamento finora assai poco studiato. I solfuri di silicio, SiS_2, d'alluminio, Al_2S_3, di boro, B_2S_3, sono nettamente distinti dagli altri solfuri omologhi per le loro proprietà chimiche; i loro caratteri fisici si allontanano pure notevolmente dagli ossidi degli stessi elementi: presentano la massima diversità che sussista fra solfuro e ossido di uno stesso elemento.

Un confronto dei solfosali con gli ossisali degli elementi su citati, e con i solfosali di elementi a eguale grado di valenza presenta un interesse generale.

Ma anche altre considerazioni mi hanno indotto allo studio di questi solfosali: le relazioni che essi possono avere con gli oltremari. Pure nella

[1] Lavoro eseguito nel laboratorio di Elettrochimica del R. Istituto Tecnico superiore di Milano, diretto dal prof. G. Carrara.

[2] Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 1912, pag. 183.