ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

principale dell'isola, poichè ad est ne discendono tutte le più lunghe valli di essa che lo intaccano formando all'origine come altrettanti circhi dall'orlo scosceso; mentre ad ovest, fra l'Uied l'Imtahleb e la Madonna del Carmelo esso precipita quasi direttamente al mare, e negli altri punti ne discendono due o tre brevissime vallette.

Nel tratto orientale fra la Notabile e San Lorenzo alla base alternano ancora strati argillosi con Pteropodi ed altri fossili per lo più frammentizî, fosfatizzati, e marne calcarifere, nelle quali trovai qualche isolato *Lithothamnium* e resti di Pesci Teleostei; superiormente marne simili a quelle del n. 4 alternano con calcari a *Nulliporae* od altrimenti organogenici e con marne assai calcarifere come quelle che stanno alla base del medesimo piano 4 nei colli di Ben Gemma; però a ponente, e forse ad un livello appena superiore, si estende il calcare a *Nulliporae*. E, come in Gozo, un vero banco, costituente in origine una estesa scogliera, ampia circa 20 km^2, e prima che fosse diminuita dalla corrosione marina ed atmosferica certo molto più; scogliera fondata sul suolo delle marne assai calcaree, costituita da *Lithothamnium* apparentemente della stessa specie dei calcari n. 3, ancora verticali, coi fillomi curvati in basso, separati, o più o meno intrecciati, che si innalzavano pari su tutta la superficie con accrescimento indefinito, non cementati nè formanti una massa compatta come taluni dei più antichi strati del piano n. 3. Relativamente rari sono i fossili invertebrati integri: frequentissimi invece ne sono i minuti frammenti. Nei colli di Ben Gemma vi ho notato *Pecten Malvinae* Dub. e frammenti di Brachiopodi.

Il Gregory cita *Clypeaster altus* Leske, a Ben Gemma, a Dingli, *C. marginatus* Lck., e *Schizaster Scillae* Desm. a Dingli.

Il Gregory dà un elenco di altri echini, il Fuchs e il De Gregorio di molluschi, il Murray di foraminifere trovati nei calcari, ma senza specificare le relative località e gli strati.

Meccanica. — *Sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi.* Nota I del dott. Lucio Silla, presentata dal Socio V. Volterra.

Supponiamo dato un mezzo elastico isotropo limitato da una superficie chiusa σ: indichiamo con S lo spazio finito e con S' lo spazio infinito limitati rispettivamente da σ. Sia, inoltre, n la normale nei punti di σ, e stabiliamo che la direzione positiva di n sia quella rivolta verso lo spazio S.

Circa la superficie σ, supporremo che essa soddisfi alle seguenti condizioni:

1°) in ogni suo punto ammetta un piano tangente determinato, variabile con continuità al variare con continuità del punto di contatto;

2°) esista un numero fisso positivo a tale che, indicando con $\widehat{nn'}$ l'angolo formato dalle direzioni positive delle normali n ed n' in due punti qualsiasi p e p' di σ e con r' il vettore $\overline{pp'}$, si abbia

$$\widehat{nn'} < ar' .$$

Le precedenti condizioni geometriche sono, in particolare, soddisfatte per qualunque superficie σ a curvatura finita.

Ora mi propongo di dimostrare che esiste sempre una serie infinita di deformazioni del mezzo elastico considerato, e che chiameremo *deformazioni fondamentali*, dipendenti esclusivamente dalla superficie σ data e dalle costanti di isotropia del mezzo elastico, tali che una deformazione qualunque di questo mezzo è sempre eguale alla sovrapposizione di un numero finito od infinito di deformazioni fondamentali.

Abbiamo così ottenuto un'estensione del noto sviluppo di una funzione armonica in serie di *funzioni fondamentali* del Poincaré ([1]).

Nella presente ricerca seguirò il metodo tenuto dal prof. Lauricella nel problema analogo delle funzioni armoniche per le aree piane ([2]), avvertendo però che, analogamente a quanto si verifica pel problema delle funzioni armoniche nei campi a tre dimensioni, non s'incontreranno nel presente problema di elasticità, le singolarità che il prof. Lauricella ha dovuto considerare per le funzioni armoniche nel piano.

Dovremo, innanzi tutto, mostrare come si possa, dati gli spostamenti in superficie, risolvere il problema di equilibrio elastico per mezzo di semplici strati elastici e, in questa prima Nota, stabiliremo appunto una condizione necessaria e sufficiente, alla quale debbono soddisfare detti spostamenti, affinchè il problema stesso abbia una soluzione.

A tale proposito aggiungo che in questo lavoro offrirò un primo esempio di risoluzione di sistemi di equazioni integrali di prima specie.

*
* *

Conveniamo che i punti di σ siano rappresentati genericamente da un sistema di coordinate curvilinee ortogonali α, β, mentre con $p'(\alpha', \beta')$ rappresenteremo un punto determinato della superficie.

Stabilita poi una terna di assi cartesiani ortogonali, distingueremo con $P(\xi, \eta, \zeta)$ il polo e con (x, y, z) un punto qualunque variabile in S o in S'.

Supponiamo ora date ad arbitrio tre funzioni $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$, finite e continue nei punti di σ, che intendiamo debbano rappresentare le

([1]) Cfr. H. Poincaré, *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (Acta Mathematica, tomo XX, 1895-96-97).

([2]) G. Lauricella, *Sull'equazione integrale di 1ª specie relativa al problema di Dirichlet nel piano* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, tomo XIX, 1° sem. 1910).

componenti, rispetto agli assi, degli spostamenti dati in superficie: ci proponiamo di costruire, sopra σ, un sistema di semplici strati elastici $V_1(\xi, \eta, \zeta)$, $V_2(\xi, \eta, \zeta)$ e $V_3(\xi, \eta, \zeta)$ tali che si abbiano:

$$V_1(\alpha', \beta') = u(\alpha', \beta'), \quad V_2(\alpha', \beta') = v(\alpha', \beta'), \quad V_3(\alpha', \beta') = w(\alpha', \beta'),$$

per ogni punto (α', β') di σ.

A tal fine ammettiamo che esistano tre funzioni $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$ finite e continue dei punti di σ, le quali rappresentino le densità dei tre strati elastici richiesti; potremo scrivere:

$$(1) \quad \begin{cases} V_1(\xi, \eta, \zeta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{\varphi(\alpha, \beta)\, u' + \psi(\alpha, \beta)\, v' + \chi(\alpha, \beta)\, w'\}\, d\sigma = \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma\varphi(\alpha, \beta)\, u'\, d\sigma, \\ V_2(\xi, \eta, \zeta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{\varphi(\alpha, \beta)\, u'' + \psi(\alpha, \beta)\, v'' + \cdots\cdots\}\, d\sigma = \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma\varphi(\alpha, \beta)\, u''\, d\sigma, \\ V_3(\xi, \eta, \zeta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{\varphi(\alpha, \beta)\, u''' + \cdots\cdots\cdots\cdots\}\, d\sigma = \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma\varphi(\alpha, \beta)\, u'''\, d\sigma, \end{cases}$$

dove le $u', v', w', u'', v'', \ldots, u''', \ldots$ indicano i noti integrali singolari delle equazioni dell'equilibrio elastico, dati dal Somigliana.

Poichè le funzioni $V_1(\xi, \eta, \zeta)$, $V_2(\xi, \eta, \zeta)$ e $V_3(\xi, \eta, \zeta)$ debbono coincidere, sul contorno σ, con le funzioni arbitrariamente date $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$, si avranno le equazioni:

$$(2) \quad \begin{cases} u(\alpha', \beta') = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma u'(\alpha, \beta; \alpha', \beta')\, \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma, \\ v(\alpha', \beta') = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma u''(\alpha, \beta; \alpha', \beta')\, \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma, \\ w(\alpha', \beta') = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma u'''(\alpha, \beta; \alpha', \beta')\, \varphi(\alpha, \beta)\, d\sigma. \end{cases}$$

Inoltre, in virtù della continuità ammessa per le funzioni $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$, esisteranno nei punti di σ le pseudo-tensioni corrispondenti agli strati elastici (1), tanto dalla parte di S, quanto dalla parte di S' [1]: in-

[1] Cfr. G. Lauricella, *Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla fisica-matematica* (Il Nuovo Cimento, ser. V, tomo XIII, gennaio-giugno 1907).

dichiamole con $\overline{V}_1(\xi,\eta,\zeta)$, $\overline{V}_2(\xi,\eta,\zeta)$, $\overline{V}_3(\xi,\eta,\zeta)$ e $\overline{\overline{V}}_1(\xi,\eta,\zeta)$, $\overline{\overline{V}}_2(\xi,\eta,\zeta)$, $\overline{\overline{V}}_3(\xi,\eta,\zeta)$ rispettivamente.

Osserviamo, ora, che le funzioni $u', v', \ldots, u'', \ldots u''', \ldots$ sono regolari allorchè il polo (ξ,η,ζ) è nel campo finito S e il punto variabile (x,y,z) si trova nel campo infinito S' e viceversa; quindi, se indichiamo con X'_σ, $Y'_\sigma, \ldots X''_\sigma, \ldots, X'''_\sigma, \ldots$ le tensioni in superficie corrispondenti a quelle deformazioni, possiamo applicare il teorema di reciprocità del Betti alle deformazioni $u', \ldots, u'', \ldots, u''', \ldots$ ed al sistema di deformazioni u, v e w di cui le pseudo-tensioni nei punti di σ sono $\overline{V}_1, \overline{V}_2, \ldots, \overline{\overline{V}}_1, \ldots$; pertanto risulteranno le equazioni seguenti:

$$
(3)\qquad\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma u(\alpha,\beta)\,.\,X'_\sigma\,d\sigma = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma u'\,.\,\overline{\overline{V}}_1\,d\sigma\,,\\[2ex]
\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma u(\alpha,\beta)\,.\,X''_\sigma\,d\sigma = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma u''\,.\,\overline{\overline{V}}_1\,d\sigma\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.
$$

se il polo (ξ,η,ζ) si trova nel campo finito S, e

$$
(4)\qquad\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma u(\alpha,\beta)\,.\,X'_\sigma\,d\sigma = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma u'\,.\,\overline{V}_1\,d\sigma\,,\\[2ex]
\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma u(\alpha,\beta)\,.\,X''_\sigma\,d\sigma = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma u''\,.\,\overline{V}_1\,d\sigma\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.
$$

se il polo (ξ,η,ζ) si trova nel campo infinito S'.

Dall'esame delle formole (3) e (4) è lecito desumere la conclusione che se, date ad arbitrio le funzioni finite e continue $u(\alpha,\beta)$, $v(\alpha,\beta)$, $w(\alpha,\beta)$, esistono gli strati elastici (1); o, ciò che fa lo stesso, se il sistema di equazioni integrali di prima specie (2), nelle funzioni incognite φ, ψ, χ, ammette un sistema di soluzioni finite e continue, i pseudo-doppî strati elastici seguenti

$$
(5)\qquad\left\{\begin{array}{l}
W_1(\xi,\eta,\zeta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma u(\alpha,\beta)\,X'_\sigma\,d\sigma\,,\\[2ex]
W_2(\xi,\eta,\zeta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma u(\alpha,\beta)\,X''_\sigma\,d\sigma\,,\\[2ex]
W_3(\xi,\eta,\zeta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma u(\alpha,\beta)\,X'''_\sigma\,d\sigma\,,
\end{array}\right.
$$

si debbono trasformare *necessariamente* in strati elastici semplici, tanto nel campo S, dove sono:

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} u_1(\xi,\eta,\zeta) &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma u' \,.\, \overline{\overline{V}}_1\, d\sigma,\\ v_1(\xi,\eta,\zeta) &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma u'' \,.\, \overline{\overline{V}}_1\, d\sigma,\\ w_1(\xi,\eta,\zeta) &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma u''' \,.\, \overline{\overline{V}}_1\, d\sigma,\end{aligned}\right.$$

quanto nel campo S', dove sono:

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} u_2(\xi,\eta,\zeta) &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma u' \,.\, \overline{V}_1\, d\sigma,\\ v_2(\xi,\eta,\zeta) &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma u'' \,.\, \overline{V}_1\, d\sigma,\\ w_2(\xi,\eta,\zeta) &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma u''' \,.\, \overline{V}_1\, d\sigma.\end{aligned}\right.$$

La trasformabilità, dunque, dei doppî strati (5), costruiti con le date funzioni u, v, w, nei semplici strati (6) e (7), rispettivamente in S e in S', risulta *condizione necessaria* per la risoluzione del problema enunciato in principio, o anche per la risoluzione del sistema di equazioni integrali di 1ª specie (2).

Reciprocamente: si ammetta che i pseudo-doppî strati elastici W_1, W_2 e W_3, costruiti con le funzioni finite e continue $u(\alpha,\beta)$, $v(\alpha,\beta)$, $w(\alpha,\beta)$, arbitrariamente date su σ, si possano trasformare, nel campo S, negli strati elastici u_1, v_1 e w_1 e, nel campo S', negli strati elastici u_2, v_2 e w_2. Posto, allora,

$$\lim_{P\equiv p'} W_1(\xi,\eta,\zeta) = \overline{W}_1(\alpha',\beta') \quad , \quad \lim_{P\equiv p'} W_2(\xi,\eta,\zeta) = \overline{W}_2(\alpha',\beta') \; , \ldots ,$$

se il punto P è nell'interno del campo finito S, e

$$\lim_{P\equiv p'} W_1(\xi,\eta,\zeta) = \overline{\overline{W}}_1(\alpha',\beta') \quad , \quad \lim_{P\equiv p'} W_2(\xi,\eta,\zeta) = \overline{\overline{W}}_2(\alpha',\beta') \; , \ldots ,$$

se P è nell'esterno del campo infinito S', a causa delle note formole di discontinuità dei pseudo-doppî strati attraverso σ, si potrà scrivere:

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \overline{W}_1(\alpha',\beta') - \overline{\overline{W}}_1(\alpha',\beta') &= 2u(\alpha',\beta'),\\ \overline{W}_2(\alpha',\beta') - \overline{\overline{W}}_2(\alpha',\beta') &= 2v(\alpha',\beta'),\\ \overline{W}_3(\alpha',\beta') - \overline{\overline{W}}_3(\alpha',\beta') &= 2w(\alpha',\beta').\end{aligned}\right.$$

Ma, per l'ipotesi ammessa, le funzioni W_1, W_2 e W_3 coincidono con le funzioni u_1, v_1 e w_1 nel campo S e con le funzioni u_2, v_2 e w_2 nel campo S'; quindi, sul contorno σ, saranno:

$$\overline{W}_1(\alpha', \beta') = u_1(\alpha', \beta') \,,\quad \overline{W}_2(\alpha', \beta') = v_1(\alpha', \beta') \,,\quad \overline{W}_3(\alpha', \beta') = w_1(\alpha', \beta') \,,$$

dalla parte di S, e:

$$\overline{\overline{W}}_1(\alpha', \beta') = u_2(\alpha', \beta') \,,\quad \overline{\overline{W}}_2(\alpha', \beta') = v_2(\alpha', \beta') \,,\quad \overline{\overline{W}}_3(\alpha', \beta') = w_2(\alpha', \beta') \,,$$

dalla parte di S'.

Pertanto, avuto riguardo alle (8), si potrà pure scrivere:

$$u_1(\alpha', \beta') - u_2(\alpha', \beta') = 2u(\alpha', \beta') \,,$$
$$v_1(\alpha', \beta') - v_2(\alpha', \beta') = 2v(\alpha', \beta') \,,$$
$$w_1(\alpha', \beta') - w_2(\alpha', \beta') = 2w(\alpha', \beta') \,;$$

ovvero, per le (6) e (7):

$$(9)\quad \begin{cases} u(\alpha', \beta') = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\sigma \Sigma u' \,(\alpha, \beta \,;\, \alpha', \beta') \cdot \frac{1}{2}(\overline{\overline{V}}_1 - \overline{V}_1)\, d\sigma \,, \\ v(\alpha', \beta') = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\sigma \Sigma u'' \,(\alpha, \beta \,;\, \alpha', \beta') \cdot \frac{1}{2}(\overline{\overline{V}}_1 - \overline{V}_1)\, d\sigma \,, \\ w(\alpha', \beta') = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\sigma \Sigma u''' \,(\alpha, \beta \,;\, \alpha', \beta') \cdot \frac{1}{2}(\overline{\overline{V}}_1 - \overline{V}_1)\, d\sigma \,. \end{cases}$$

Dal confronto delle equazioni (2) con le equazioni (9) risulta che il sistema di equazioni integrali di 1ª specie (2) ammette la soluzione:

$$(10)\quad \begin{cases} \varphi(\alpha, \beta) = \dfrac{1}{2}(\overline{\overline{V}}_1 - \overline{V}_1) \,,\quad \psi(\alpha, \beta) = \dfrac{1}{2}(\overline{\overline{V}}_2 - \overline{V}_2) \,, \\ \chi(\alpha, \beta) = \dfrac{1}{2}(\overline{\overline{V}}_3 - \overline{V}_3) \,. \end{cases}$$

Vale a dire: se si sanno trasformare i pseudo-doppî strati elastici (5) nei semplici strati elastici (6) e (7), rispettivamente nel campo finito S e nel campo infinito S', di guisa che si possano considerare note le funzioni $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ e $\overline{\overline{V}}_1$, $\overline{\overline{V}}_2$, $\overline{\overline{V}}_3$, allora si ottiene, mediante le formole (10), una soluzione del sistema di equazioni integrali di 1ª specie (2), e perciò si possono costruire i semplici strati elastici (1) che risolvono il problema enunciato in principio.

E qui possiamo aggiungere il seguente teorema di unicità.

Tutte le volte che un sistema di equazioni integrali di 1ª specie (2) ammette una soluzione, essa è unica; o, in altre parole, *il sistema dei nuclei* $u', v', w', u'', \ldots, u''', \ldots$ *che entrano nelle equazioni* (2) *è un sistema chiuso*.

Supponiamo, infatti, che per $u = v = w = 0$, le equazioni (2) ammettano una soluzione, finita e continua nei punti di σ che chiameremo $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$. Se costruiamo gli strati elastici corrispondenti, aventi cioè per densità le funzioni φ_1, ψ_1 e χ_1, essi avranno valori nulli in superficie, e quindi saranno nulli tanto in S quanto in S'. Segue che anche le corrispondenti pseudo-tensioni sono nulle, e perciò le formole di discontinuità delle pseudo-tensioni portano alle condizioni $\varphi_1 = \psi_1 = \chi_1 = 0$, che dimostrano l'unicità della soluzione del sistema (2) già trovata.

Pertanto il problema di determinare tre strati elastici i quali sul contorno σ assumano i valori $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ e $w(\alpha, \beta)$ dipende dalla risoluzione di un sistema di equazioni integrali di 1ª specie, la quale, a sua volta, dipende dalla trasformazione di un sistema di pseudo-doppî strati elastici in strati elastici equivalenti, sia nel campo S sia nel campo S'.

E riassumendo il risultato di questa prima Nota, possiamo affermare che: *la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un sistema di semplici strati elastici i quali, nei punti del contorno* σ, *coincidano con tre funzioni finite e continue* $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ *date ad arbitrio, è che i pseudo-doppi strati elastici costruiti con le densità* u, v *e* w *si possano trasformare in semplici strati elastici equivalenti, tanto nel campo finito* S *quanto nel campo infinito* S'.

Meccanica. — *Sui moti stazionarii nel caso della Kowalevsky.* Nota della sig^na^. Clelia Silvestri, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Colla presente Nota [continuazione e fine di altra apparsa sotto lo stesso titolo il 3 novembre u. s.] esaurirò l'indagine concernente la stabilità dei moti stazionarî di un solido nel caso della Kowalevsky, esaminando il terzo tipo già designato con *b*). Si tratta delle ∞^2 soluzioni, specificamente provenienti (secondo la regola di Levi-Civita) dall'integrale della Kowalewsky.

1. Converrà per questa discussione far uso delle equazioni di Eulero. Scegliendo opportunamente l'unità di tempo e dando alle lettere il significato solito, si ha complessivamente il sistema:

$$(K)\quad \begin{cases} (1) & 2\dot{p} = qr \quad , \quad 2\dot{q} = -(rp + \gamma_3) \quad , \quad \dot{r} = \gamma_2 \, , \\ (2) & \dot{\gamma}_1 = \gamma_2 r - \gamma_3 q \quad , \quad \dot{\gamma}_2 = \gamma_3 p - \gamma_1 r \quad , \quad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1 q - \gamma_2 p \end{cases}$$