ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Matematica. — *Sull'integrazione della* Δ_4. Nota della dottoressa TERESA ASTUTI, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO.

In un breve lavoro, inserito nel marzo 1906 nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, il prof. Orlando riduceva il difficile problema di integrazione della Δ_4 al problema più facile di integrazione della Δ_2 ed alle equazioni integrali del tipo di Fredholm. Quel metodo apparve criticabile, perchè l'equazione integrale conteneva sotto l'integrale un infinito di ordine troppo alto [1].

Qui vogliamo far vedere come si possa, senza molta fatica, riparare al segnalato inconveniente.

Sia dunque S un campo a tre dimensioni; e in ogni punto del suo contorno σ sia nota la funzione u e la derivata normale $\frac{du}{dn}$; sia inoltre in tutto il campo verificata l'equazione $\Delta_4 u = 0$.

Poniamo, come nel citato lavoro,

$$V = \frac{1}{2}\left(r^2 G + \frac{1}{G}\right),$$

dove G è la prima funzione di Green, cioè quella funzione di Green che diventa $\frac{1}{r}$ al contorno.

Scriviamo anche qui la formola

$$8\pi u(xyz) = \int_\sigma \left[u \frac{d\Delta_2(r-V)}{dn} - \frac{du}{dn}\Delta_2(r-V)\right] d\sigma - \int_S u\,\Delta_4 V dS,$$

in base ai teoremi di Green.

Finchè restiamo in questa generalità, nessuno assicura che la formula non sia illusoria. Restringendoci invece ad un caso particolare, noi vogliamo imporre, in ogni punto di σ, le due condizioni

$$u = 0, \qquad \frac{du}{dn} = \frac{dr}{dn} - \frac{d\boldsymbol{\Gamma}}{dn}, \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{\Gamma}$ denota una soluzione regolare della Δ_2, tale da diventare uguale ad r quando il punto variabile, in funzione del quale consideriamo u, si

[1] Vedere E. E. Levi, *I problemi dei valori al contorno* ecc. Memorie dei XL, ser. 3ª, T. XVI (1909).

porta sul contorno σ. Osserviamo che nel citato lavoro del prof. Orlando non si tenta di venire a capo della questione di esistenza, ma si cerca soltanto di risolvere, in modo formalmente semplice, l'importante problema dell'effettiva integrazione della Δ_4.

Rimanendo in quell'ordine di concetti, noi possiamo ammettere che la funzione biarmonica u, soggetta alle condizioni (1), senz'altro esista.

Intanto scriviamo $\Delta_4 V = \frac{1}{2} \Delta_4 \frac{1}{G}$, perchè $r^2 G$ è una funzione biarmonica. Il Δ_4 della funzione $\frac{1}{G}$ è penoso a calcolarsi, ma a noi basta vedere che singolarità esso presenta quando i due punti ai quali la G si riferisce, vadano, sulla superficie, a coincidere.

Le funzioni G e $G \frac{1}{G} = 1$ dànno il Δ_2 nullo, dunque possiamo subito scrivere

$$G\Delta_2 \frac{1}{G} - \frac{1}{G_2}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2\right] = 0,$$

$$\Delta_2 \frac{1}{G} = \frac{1}{G_2}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2\right].$$

Senza ulteriori calcoli, se ne ricava subito, in base al noto ordine delle derivate di r, che l'ordine del polo di $\Delta_4 \frac{1}{G}$ non può superare quello di $r^3 \frac{1}{r^2} \frac{1}{r^4} = \frac{1}{r^3}$.

L'espressione $u\Delta_4 V$, che per u generico rischierebbe di non essere integrabile, presenta dunque, dopo le nostre ipotesi, un polo d'ordine non superiore a quello di $\frac{1}{r^2}$, perchè u si annulla, al contorno, d'ordine non inferiore a quello di $\frac{1}{r}$, come risulta dalle (1), e dal teorema di Liapunoff, applicato a $\frac{d\boldsymbol{\Gamma}}{dn}$.

E allora dal concetto fondamentale del metodo di Fredholm noi vediamo che, isolando in una casella opportunamente piccola il polo, si fa sul termine noto, e poi di conseguenza sulla funzione incognita, un errore arbitrariamente piccolo.

Il metodo di risoluzione resta dunque applicabile alla ricerca della cosiddetta *seconda funzione di Green*, $u + \boldsymbol{\Gamma}$; che è poi la chiave del problema generale. Nel caso di due dimensioni, si procederà analogamente.