ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Tutte le volte che un sistema di equazioni integrali di 1ª specie (2) ammette una soluzione, essa è unica; o, in altre parole, *il sistema dei nuclei* $u', v', w', u'', \dots, u''', \dots$ *che entrano nelle equazioni* (2) *è un sistema chiuso.*

Supponiamo, infatti, che per $u = v = w = 0$, le equazioni (2) ammettano una soluzione, finita e continua nei punti di σ che chiameremo $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$. Se costruiamo gli strati elastici corrispondenti, aventi cioè per densità le funzioni φ_1, ψ_1 e χ_1, essi avranno valori nulli in superficie, e quindi saranno nulli tanto in S quanto in S'. Segue che anche le corrispondenti pseudo-tensioni sono nulle, e perciò le formole di discontinuità delle pseudo-tensioni portano alle condizioni $\varphi_1 = \psi_1 = \chi_1 = 0$, che dimostrano l'unicità della soluzione del sistema (2) già trovata.

Pertanto il problema di determinare tre strati elastici i quali sul contorno σ assumano i valori $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ e $w(\alpha, \beta)$ dipende dalla risoluzione di un sistema di equazioni integrali di 1ª specie, la quale, a sua volta, dipende dalla trasformazione di un sistema di pseudo-doppî strati elastici in strati elastici equivalenti, sia nel campo S sia nel campo S'.

E riassumendo il risultato di questa prima Nota, possiamo affermare che: *la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un sistema di semplici strati elastici i quali, nei punti del contorno* σ, *coincidano con tre funzioni finite e continue* $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ *date ad arbitrio, è che i pseudo-doppi strati elastici costruiti con le densità* u, v *e* w *si possano trasformare in semplici strati elastici equivalenti, tanto nel campo finito* S *quanto nel campo infinito* S'.

Meccanica. — *Sui moti stazionarii nel caso della Kowalevsky.* Nota della sig^na^. Clelia Silvestri, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Colla presente Nota [continuazione e fine di altra apparsa sotto lo stesso titolo il 3 novembre u. s.] esaurirò l'indagine concernente la stabilità dei moti stazionarî di un solido nel caso della Kowalevsky, esaminando il terzo tipo già designato con *b*). Si tratta delle ∞^2 soluzioni, specificamente provenienti (secondo la regola di Levi-Civita) dall'integrale della Kowalewsky.

1. Converrà per questa discussione far uso delle equazioni di Eulero. Scegliendo opportunamente l'unità di tempo e dando alle lettere il significato solito, si ha complessivamente il sistema:

$$(K)\quad \begin{cases} (1) \quad 2\dot{p} = qr \quad , \; 2\dot{q} = -(rp + \gamma_3) \; , \; \dot{r} = \gamma_2 \, , \\ (2) \quad \dot{\gamma}_1 = \gamma_2 r - \gamma_3 q \; , \; \dot{\gamma}_2 = \gamma_3 p - \gamma_1 r \; , \; \dot{\gamma}_3 = \gamma_1 q - \gamma_2 p \end{cases}$$

$\left(\text{sostituendo il punto sopra le lettere il simbolo operativo } \frac{d}{dt}\right)$ che ammette, oltre all'identità geometrica $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, gli integrali

$$\text{(3)} \qquad H = p^2 + q^2 + \tfrac{1}{2} r^2 - \gamma_1 = h \qquad \text{(delle forze vive)}$$

$$\text{(4)} \qquad 2(\gamma_1 p + \gamma_2 q) + \gamma_3 r = c \qquad \text{(delle aree)}$$

$$\text{(5)} \qquad \{(p+iq)^2 + \gamma_1 + i\gamma_2\}\{(p-iq)^2 + \gamma_1 - i\gamma_2\} = \mu^4 \quad \text{(della Kowalevsky)},$$

h, c, μ^4 designando costanti delle quali l'ultima essenzialmente positiva.

2. La condizione di stazionarietà dei moti che provengono da quest'ultimo integrale [(5)], può porsi sotto la forma:

$$\text{(6)} \qquad \delta H + \lambda_1 \delta F + \lambda_2 \delta(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) = 0$$

(λ_1 e λ_2 moltiplicatori arbitrarii),

F essendo l'integrale (5). Affinchè questa condizione sia soddisfatta occorre intanto che si annulli il coefficiente di δr, il che dà:

$$r = 0 .$$

Dalla ispezione delle (K), e precisamente da $\dot{r} = \gamma_2$, risulta allora

$$\gamma_2 = 0 ,$$

dopo di che la $\dot{\gamma}_2 = \gamma_3 p - \gamma_1 r$ mostra che deve annullarsi il prodotto $\gamma_3 p = 0$. Posso prescindere dall'ipotesi $\gamma_3 = 0$. Essa implica infatti $\gamma_1 = \pm 1$, $q = 0$ e riporta a rotazioni uniformi attorno alla verticale, diretta nel corpo secondo l'asse baricentrico Ox. Già ho discriminato, nella Nota precedente, le condizioni di stabilità di queste rotazioni. Riterrò dunque $\gamma_3 \neq 0$, e quindi $p = 0$, assieme ad $r = 0$, $\gamma_2 = 0$. Si tratta manifestamente di rotazioni del solido attorno all'asse delle $y (p = r = 0)$ diretto orizzontalmente $(\gamma_2 = 0)$. In tale movimento esso si comporta come un pendolo composto ([1]).

Indicando con u una conveniente funzione ellittica del tempo, i valori di γ_1, γ_3, q corrispondenti ad una di queste soluzioni $\Sigma (r = p = \gamma_2 = 0)$ sono rispettivamente

$$\cos u \quad , \quad \operatorname{sen} u \quad , \quad \dot{u} .$$

2. Ciò premesso, poniamo

$$\gamma'_1 = \gamma_1 - \cos u \quad , \quad \gamma'_3 = \gamma_4 - \operatorname{sen} u \quad , \quad q' = q - \dot{u} .$$

Per una soluzione generica [dell'originario sistema (K)] prossima alla Σ

([1]) Cfr. Levi-Civita, *Sui moti stazionarii di un corpo rigido nel caso della Kowalevsky*, in questi Rendiconti, vol. X, anno 1901.

saranno da trattarsi come quantità di prim'ordine p, r, γ_2, nonchè γ_1', γ_3', q'. Riducendo in conformità le (K) abbiamo:

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} \dot p = \frac{1}{2}\dot u r\,, \\ \dot r = \gamma_2\,, \\ \dot\gamma_2 = p \operatorname{sen} u - r\cos u\,; \end{cases}$$

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} \dot q' = -\frac{1}{2}\gamma_3' \\ \dot\gamma_1' = -q' \operatorname{sen} u - \dot u \gamma_3' \\ \dot\gamma_3' = \quad q'\cos u + \dot u \gamma_1'\,. \end{cases}$$

Come si vede il sistema (I) contiene soltanto p, r, γ_2; il sistema (II) q', γ_1', γ_3'.

4. Gli integrali delle (K) dànno luogo ad altrettanti integrali di (I), (II). Più precisamente, ove si imaginino sviluppati i primi membri delle (3), (4), (5) per p, r, γ_2, $q' = q - \dot u$, $\gamma_1' = \gamma_1 - \cos u$, $\gamma_3' = \gamma_3 - \operatorname{sen} u$, la parte di ordine zero risulterà di per sè costante (in quanto corrisponde alla soluzione Σ). Il complesso dei termini successivi d'ordine minimo [sarà in generale il *primo*, meno che per H in cui, previe opportune riduzioni, i termini di prim'ordine scompariscono, attesa la stazionarietà] fornirà gli annunciati integrali.

Si troverà così, per quanto attiene alla Σ,

$$(3')\qquad \dot u^2 - \cos u = h$$

dall'integrale delle forze vive; $c = 0$ dall'integrale delle aree;

$$(-\dot u^2 + \cos u)^2 = \mu^4$$

dall'integrale della Kowalewsky. La quantità in parentesi è h talchè si ha la relazione numerica

$$h^2 = \mu^4\,.$$

Prima di passare ai termini d'ordine immediatamente superiore, sarà opportuno distinguere i due casi:

b_1) $\qquad h$ negativo $(= -\mu^2)$;

b_2) $\qquad h$ positivo $(= \quad \mu^2)$;

ed introdurre un parametro ausiliario ε che consente di sostituire all'integrale (5) le due relazioni, complessivamente equivalenti,

$$(5')\qquad \gamma_1 = \mu^2\cos\varepsilon - p^2 + q^2\,,$$

$$(5'')\qquad \gamma_2 = \mu^2\operatorname{sen}\varepsilon - 2pq\,.$$

In virtù delle (5') e (3') il valore che compete ad ε sopra la Σ è: 0 per $h = -\mu^2$; π per $h = \mu^2$.

Nel fare lo sviluppo potranno pertanto trattarsi come quantità di primo ordine ε nel caso b_1); $\pi - \varepsilon$ nel caso b_2).

L'integrale delle forze vive, tenendo conto della (5'), può essere scritto:

$$2p^2 + \tfrac{1}{2}r^2 - \mu^2 \cos\varepsilon = \text{cost}\,,$$

da cui, limitando lo sviluppo del coseno alla parte di secondo ordine,

$$(3'') \qquad 2p^2 + \tfrac{1}{2}r^2 + \tfrac{1}{2}\mu^2\varepsilon^2 = \text{cost} \qquad \textit{nel caso } b_1)$$

$$(3''') \qquad 2p^2 + \tfrac{1}{2}r^2 - \tfrac{1}{2}\mu^2(\pi - \varepsilon)^2 = \text{cost} \qquad \textit{nel caso } b_2).$$

Si ha poi, dall'integrale delle aree,

$$(4') \qquad 2\{\cos u \;\; p + \dot{u}\gamma_2\} + \text{sen}\, u \,.\, r = c\,,$$

e da quello della Kowalevsky

$$(5''') \qquad \gamma_1' - 2\,\dot{u}\,q' = 0\,.$$

Si noti che ho qui attribuito il valore zero alla costante del secondo membro, perchè la stabilità della Σ, che è stazionaria, di fronte all'integrale (5) (della Kowalevsky) va indagata colla stessa relatività, cioè nell'àmbito delle soluzioni, per cui la costante μ^4 dell'integrale (5) conserva il medesimo valore.

Ove si tratti alla stessa stregua l'identità geometrica $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ se ne desume l'ulteriore integrale lineare

$$\cos u \,.\, \gamma_1' + \text{sen}\, u \,.\, \gamma_3' = 0\,.$$

5. Mercè quest'ultimo e la (5'') il sistema (II) risulta immediatamente integrabile. Infatti alla seconda e terza equazione di tale sistema si possono imaginare sostituite le relazioni in termini finiti testè ricordate; o, più simmetricamente, ponendo $q' = k \,\text{sen}\, u$,

$$(8) \qquad \gamma_1' = 2\,k\dot{u}\,\text{sen}\, u \quad , \quad \gamma_3' = -\,2\,k\dot{u}\cos u\,.$$

Resta da determinare k, al che provvede la prima delle (II), $\dot{q}' = -\tfrac{1}{2}\gamma_3'$. Sostituendovi per q' e γ_3', $k\,\text{sen}\, u$ e $-2k\dot{u}\cos u$, si trova $\dot{k} = 0$ ossia $k = \text{cost}$.

Dopo ciò è manifesto che q', γ_1', γ_3' risultano funzioni periodiche di t, al pari di $\dot{u}$, $\cos u$, $\text{sen}\, u$. Ne consegue che, *nei riguardi degli argomenti* q, γ_1, γ_3 *la* Σ *si comporta sempre con stabilità.*

6. Il carattere discriminante (della complessiva stabilità della Σ) si riporta perciò esclusivamente agli altri tre argomenti p, r, γ_2. Di quest'ultimo si può, anzi, senz'altro affermare che si mantiene sempre prossimo a

zero, attesa l'identità $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ ed il già riconosciuto comportamento di γ_1, γ_3. Comunque il nostro còmpito è ora di discutere la stabilità della soluzione $p = r = \gamma_2 = 0$ del sistema (I).

Nel caso b_1), la (3') ci assicura senz'altro che si ha stabilità: anche il parametro ausiliario ε partecipa di tale carattere.

Nel case b_2), giova incominciare col trasformare il sistema (I), sostituendovi all'incognita γ_2

$$\eta = \pi - \varepsilon, \tag{9}$$

legata ad essa dalla (5''), e, al pari di essa, nulla sopra la Σ.

Siccome, derivando materialmente le (5'), (5'') con riferimento alle (K), si ha

$$\mu^2 \operatorname{sen} \varepsilon(\dot{\varepsilon} + r) = 0,$$

$$\mu^2 \cos \varepsilon(\dot{\varepsilon} + r) = 0,$$

segue $\dot{\varepsilon} + r = 0$ ossia, per la (9), $\dot{\eta} = r$. D'altra parte la (5''), limitandone il secondo membro alla parte di primo ordine, dà γ_2 sotto la forma $\mu^2\eta - 2\dot{u}p$. Il sistema (I) diventa così:

$$\left\{\begin{aligned} 2\dot{p} &= \dot{u}r \\ \dot{r} &= \mu^2\eta - 2\dot{u}p \\ \dot{\eta} &= r. \end{aligned}\right. \tag{I'}$$

I due integrali (3''') e (4') [spettanti nel caso in esame al sistema (I)] divengono in conformità

$$2p^2 + \tfrac{1}{2}r^2 - \tfrac{1}{2}\mu^2\eta^2 = \text{cost}, \tag{10}$$

e

$$-2(\mu^2 + \dot{u}^2)p + 2\mu^2\dot{u}\eta + \operatorname{sen} u \,.\, r = c: \tag{11}$$

il coefficiente di p ha assunto l'espressione ora scritta in virtù della identità $\cos u = \dot{u}^2 + \mu^2$.

Dobbiamo riferirci alla soluzione $p = r = \eta = 0$. Riconosceremo che essa è instabile, anche limitando il confronto alla categoria ∞^2 di soluzioni per cui si annulla c.

7. Ritenendo infatti p definita da:

$$2p = \frac{2\mu^2\dot{u}\eta + \operatorname{sen} u \,.\, r}{\mu^2 + \dot{u}^2}, \tag{11}$$

il sistema lineare (I') si riduce al tipo

$$\left\{\begin{aligned} \dot{r} &= a_{11}r + a_{12}\eta \\ \dot{\eta} &= a_{21}r + a_{22}\eta, \end{aligned}\right. \tag{I''}$$

i coefficienti

$$(12)\qquad a_{11} = -\frac{\dot{u}\,\mathrm{sen}\,u}{\mu^2 + \dot{u}^2}\ ,\quad a_{12} = \mu^2 - \frac{2\,\mu^2\,\dot{u}^2}{\mu^2 + \dot{u}^2}\ ,\quad a_{21} = 1\ ,\quad a_{22} = 0$$

essendo funzioni periodiche del tempo t (regolari per tutti i valori reali).

L'integrale quadratico (10) ridotto a mezzo della (11) assume l'aspetto

$$A\,r^2 + 2\,B\,r\,\eta + C\,\eta^2 = \mathrm{cost}$$

essendosi posto per brevità

$$A = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\frac{\mathrm{sen}\,u}{(\mu^2 + \dot{u}^2)^2} = \tfrac{1}{2}\left\{1 + \frac{\mathrm{sen}\,u}{(\mu^2 + \dot{u}^2)^2}\right\},$$

$$B = \frac{\mu^2\,\dot{u}\,\mathrm{sen}\,u}{(\mu^2 + \dot{u}^2)^2}\,,$$

$$C = -\tfrac{1}{2}\,\mu^2 + \frac{2\,\mu^4\,\dot{u}^2}{(\mu^2 + \dot{u}^2)^2} = -\tfrac{1}{2}\,\mu^2\,\frac{(\mu^2 + \dot{u}^2)^2}{(\mu^2 - \dot{u}^2)^2}\,.$$

Il relativo discriminante

$$D = AC - B^2$$

risulta, come apparisce dalle (13) essenzialmente negativo. Inoltre A non si annulla mai ed il rapporto

$$\frac{\sqrt{-D}}{A}\,a_{21}$$

conserva sempre il medesimo segno. In queste condizioni — ha dimostrato recentemente il prof. Levi-Civita [1] — la soluzione $r = \eta = 0$ di (I″) è certamente instabile.

Concludiamo pertanto che *le soluzioni stazionarie provenienti dall'integrale della Kowalevsky sono stabili nel caso* b_1) [*oscillazioni pendolari*], *instabili nel caso* b_2) [*rotazioni complete attorno all'asse* Oy *diretto orizzontalmente*]

Ciò è perfettamente conforme a quanto aveva asserito il Levi-Civita nella sua ricerca [2], argomentandolo dal fatto (insufficiente) che l'espressione ridotta dell'energia corrisponde ad una forma indefinita: se ne ha ora rigorosa conferma.

(1) *Sur les systèmes linéaires à deux inconnues admettant une intégrale quadratique*, tuttora in corso di stampa negli Annaes da Academia Politechnica do Porto, vol. VIII.

(2) Loc. cit., pag. 344