ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

identico a quello della forma α. Perciò queste successive trasformazioni si potranno rappresentare con lo schema:

$$C_6H_5 . N{=}\underset{\underset{O}{\|}}{N} . C_6H_4 . NO_2 \xrightarrow{H_2CrO_4} C_6H_5 . \underset{\underset{O}{\|}}{N}{=}N . C_6H_4 . NO_2 \xrightarrow{H_2SO_4}$$

$$\longrightarrow (HO)\, C_6H_4 . N{=}N . C_6H_4 . NO_2 .$$

Matematica. — *Sopra alcuni polinomii definiti, considerati da Hurwitz.* Nota del dott. L. Orlando, presentata dal Corrispondente A. Di Legge.

L'illustre prof. A. Hurwitz, in una recente Nota [1], trae occasione da due importanti questioni particolari, per affrontare una questione più estesa, sulla quale mi permetto insistere.

Se

$$(1) \qquad f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{2n} x^{2n}$$

denota un polinomio sempre positivo per ogni x reale, allora i due polinomî

$$(2) \qquad f_1(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(2n)}(x)$$

$$(3) \qquad f_2(x) = f(x) + \frac{1}{1!} f''(x) + \frac{1}{2!} f^{(4)}(x) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(2n)}(x)$$

sono anch'essi definiti positivi.

Hurwitz osserva che, volendo dimostrare ciò per via trascendente, basta osservare che i due integrali positivi

$$(4) \qquad \int_0^\infty e^{-u} f(x+u)\, du$$

$$(5) \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{4}} f(x+u)\, du$$

valgono rispettivamente [2] $f_1(x)$ ed $f_2(x)$. Ma passiamo alla questione ge-

[1] *Ueber definite Polynome.* Math. Annalen, LXXIII (1912).

[2] Per $f_2(x)$ si svilupperà $f(x+\alpha)$, e si applicherà la nota formula che si ottiene derivando ν volte primo e secondo membro della relazione $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-yx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{y}}$ rispetto ad y. Circa la $f_1(x)$, si può anche risparmiare l'impiego dell'integrale (4), osservando che $e^{-x} f_1(x)$ ha evidentemente per derivata $-e^{-x} f(x)$, che è negativa: dunque $e^{-x} f_1(x)$ è decrescente; ma tende a zero per x infinito, dunque è sempre positiva, e tale deve essere anche $f_1(x)$, ottenutane sopprimendo il fattore positivo e^{-x}.

nerale che l'illustre autore si propone di risolvere per via algebrica. Egli scrive

$$\text{(6)} \qquad F(x) = a_0 f(x) + a_1 f'(x) + a_2 f''(x) + \cdots + a_{2n} f^{(2n)}(x),$$

e si domanda come debbono essere i coefficienti a_i affinchè $F(x)$ risulti un polinomio definito positivo.

Allontaniamoci per un po' dalle considerazioni di Hurwitz, e scriviamo

$$\text{(7)} \quad \begin{cases} f(x+\alpha_1) = f(x) + \dfrac{\alpha_1}{1} f'(x) + \dfrac{\alpha_1^2}{1\,.\,2} f''(x) + \cdots + \dfrac{\alpha_1^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(x) \\ f(x+\alpha_2) = f(x) + \dfrac{\alpha_2}{1} f'(x) + \dfrac{\alpha_2^2}{1\,.\,2} f''(x) + \cdots + \dfrac{\alpha_2^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x+\alpha_\mu) = f(x) + \dfrac{\alpha_\mu}{1} f'(x) + \dfrac{\alpha_\mu^2}{1\,.\,2} f''(x) + \cdots + \dfrac{\alpha_\mu^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(x), \end{cases}$$

dove μ è molto grande: per esempio, non inferiore a $4n$.

Sommando, dopo d'aver moltiplicato per $\dfrac{a_0}{\mu}$, otteniamo come primo membro una funzione positiva $P(x)$, e come secondo membro otteniamo

$$\text{(8)} \qquad a_0 f(x) + \frac{a_0}{\mu}\frac{s_1}{1} f'(x) + \cdots + \frac{a_0}{\mu}\frac{s_{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(x),$$

dove genericamente si è posto $s_\nu = \alpha_1^\nu + \alpha_2^\nu + \cdots + \alpha_\mu^\nu$. Se i coefficienti a_i, che figurano nella funzione $F(x)$ espressa dalla (6), consentono che, *colle* α *tutte reali*, si possa porre genericamente $\dfrac{a_0}{\mu}\dfrac{s_i}{i!} = a_i$, o anche

$$\text{(9)} \qquad s_i = i!\,\mu\,\frac{a_i}{a_0},$$

allora $F(x)$ risulta definita positiva.

Ciò avverrà sempre quando (¹) risultino positivi i determinanti

$$\text{(10)} \qquad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}, \ldots\ldots,$$

ricavati dal discriminante dell'equazione che ha le α per radici. A noi occorrerà precisare soltanto le prime $2n$ fra le s_i, perchè tante ne impegna

(¹) Ved., per esempio, Serret, *Cours d'algèbre supérieure*. Édit. 1877, pag. 579.

la formula (9). Le successive potranno sempre fissarsi tali che i determinanti (10) che le contengono risultino positivi anch'essi (basterà fissare opportunamente alta l'ultima s). I determinanti (10) pessono scriversi

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & 2a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 2!\,a_2 \\ a_1 & 2!\,a_2 & 3!\,a_3 \\ 2!\,a_2 & 3!\,a_3 & 4!\,a_4 \end{vmatrix}, \ldots\ldots, \tag{11}$$

o anche nella forma (14) del citato lavoro di Hurwitz.

Con ciò noi siamo giunti a stabilire una condizione *sufficiente* affinchè $F(x)$ sia definita. Che non è *necessaria* si vede subito, osservando, per esempio, il polinomio

$$f(x) = x^2 + 2,$$

e (con $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$) formando

$$F(x) = f(x) + f'(x) = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1.$$

Questa $F(x)$ è evidentemente definita positiva, ma non è positivo il determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

L'esame dei determinanti (11) è molto comodo nel caso del polinomio (2). Se infatti consideriamo il determinante (11) d'ordine generale ν, relativo a questo caso, e ne dividiamo la terza colonna per $2!$, la 4^a per $3!, \ldots$, la ν^{ma} per $(\nu-1)!$, e poi facciamo semplicissime riduzioni, noi veniamo a trovare il determinante di Vandermonde, costituito colle potenze dei numeri $1, 2, 3, \ldots, \nu$; cioè un prodotto di $\binom{\nu}{2}$ differenze positive. Nel caso di $f_2(x)$, l'esame dell'integrale (5) è proprio preferibile [1].

Riepilogando, possiamo dire che l'importante questione, alla quale Hurwitz ha rivolto la consueta genialità ed il consueto acume, rimane ancora effettivamente aperta verso la ricerca di condizioni meno immediate e più praticamente applicabili.

[1] Si potrebbe porre il problema: come debbono essere date le costanti $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n}$ affinchè l'equazione funzionale $\int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha)\,\alpha^\nu d\alpha = \lambda_\nu$ ammetta per soluzione una funzione $A(\alpha)$ positiva o nulla (non negativa)? Più generalmente, la $A(\alpha)$ potrebbe ricercarsi tale da rendere positivo l'integrale $\int A(\alpha)\,f(x+\alpha)\,d\alpha$, esteso anche ad un'opportuna linea che si scosti dall'asse reale. I λ_ν possono intendersi come particolari valori di una funzione $\lambda(\nu)$, ottenuta, se si vuole, per interpolazione. Osserviamo che, anche con α complesse, la somma dei primi membri delle (7) si può ottenere positiva; se, per esempio, le α fossero (ripetute due volte) le radici $(2n)^{me}$ dell'unità, la somma dei secondi membri ($\mu = 4n$) darebbe $4nf + \frac{2}{(2n)!} f^{(2n)}$, cioè una funzione positiva.