ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Meccanica. — *Sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi.* Nota II del Dott. Lucio Silla, presentata dal Socio V. Volterra.

Nella precedente Nota [1] mi ero proposto la ricerca delle « deformazioni fondamentali » di un mezzo elastico isotropo. Intanto avevo dimostrato l'equivalenza fra la risolvibilità del problema dell'equilibrio elastico, dati gli spostamenti in superficie, mediante semplici strati elastici, e la trasformabilità di un pseudo-doppio strato (elastico) in uno strato semplice.

Il risultato al quale ero giunto si può così enunciare:

« Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un sistema di semplici strati elastici i quali, nei punti di una data superficie chiusa σ, coincidano con tre funzioni finite e continue $u(\alpha,\beta)$, $v(\alpha,\beta)$ e $w(\alpha,\beta)$, date ad arbitrio su σ, è che gli pseudo-doppî strati elastici costruiti con le densità u, v e w si possano trasformare in semplici strati elastici equivalenti, sia nel campo finito S, limitato da σ, sia nel campo infinito S' ».

In questa Nota mi propongo di ricercare quali siano le condizioni necessarie e sufficienti affinchè si possa attuare la trasformazione suddetta e di trovare, quindi, le condizioni necessarie e sufficienti a cui debbono soddisfare le date funzioni u, v e w affinchè il primo problema fondamentale dell'elasticità sia risolubile per mezzo di semplici strati elastici.

Poichè dovrò talvolta citare le quattro Memorie del prof. Lauricella, *Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla fisica-matematica* [2], le indicherò coi numeri I, II, III e IV. Si intende che, circa il contorno σ, supporremo soddisfatte le condizioni specificate in principio della mia prima Nota.

Consideriamo gli pseudo-doppî strati elastici seguenti:

$$(1)\quad \begin{cases} W_1(\xi,\eta,\zeta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \left\{ u(\alpha,\beta)\,X'_\sigma + v(\alpha,\beta)\,Y'_\sigma + w(\alpha,\beta)\,Z'_\sigma \right\} d\sigma = \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma u(\alpha,\beta)\,X'_\sigma\, d\sigma\,, \\ W_2(\xi,\eta,\zeta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \left\{ u(\alpha,\beta)\,X''_\sigma + v(\alpha,\beta)\,Y''_\sigma + \cdots\cdots \right\} d\sigma = \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma u(\alpha,\beta)\,X''_\sigma\, d\sigma\,, \\ W_3(\xi,\eta,\zeta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \left\{ u(\alpha,\beta)\,X'''_\sigma + \cdots\cdots\cdots\cdots \right\} d\sigma = \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma u(\alpha,\beta)\,X'''_\sigma\, d\sigma\,, \end{cases}$$

[1] Vedi questi Rendiconti, vol. XXII, serie 5ª, 1° sem. (1913), pp. 12 e seg.

[2] Il Nuovo Cimento, serie V, tomo XIII, 1907.

dove ξ, η, ζ indicano le coordinate del polo P; $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ sono funzioni *date* finite e continue dei punti di σ, e $X'_\sigma, Y'_\sigma, Z'_\sigma, X''_\sigma, \ldots, X'''_\sigma, \ldots$ rappresentano le componenti delle tensioni in superficie corrispondenti alle ben note deformazioni fondamentali del Somigliana $u', v', w', u'', \ldots, u''', \ldots$

Ci proponiamo di trasformare, nel campo finito S, i doppî strati (1) in semplici strati: ossia ci proponiamo di determinare tre funzioni X_σ, Y_σ e Z_σ tali che gli strati elastici semplici:

$$(2)\quad U_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X_\sigma u' \, d\sigma \;,\quad U_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X_\sigma u'' \, d\sigma \;,$$
$$U_3(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X_\sigma u''' \, d\sigma$$

coincidano, dentro S, con gli pseudo-doppî strati elastici (1), talchè si abbiano le equazioni seguenti:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} W_1(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma u X'_\sigma \, d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X_\sigma u' \, d\sigma = U_1(\xi, \eta, \zeta), \\ W_2(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma u X''_\sigma \, d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X_\sigma u'' \, d\sigma = U_2(\xi, \eta, \zeta), \\ W_3(\xi, \eta, \zeta) &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = U_3(\xi, \eta, \zeta). \end{aligned}\right.$$

Ebbene, ammettiamo che le tre funzioni X_σ, Y_σ e Z_σ esistano e siano finite e continue nei punti della superficie σ; allora, in virtù della teoria degli strati elastici, esisteranno dalla faccia interna di σ le componenti delle corrispondenti pseudo-tensioni (Mem. II, § 11) che, per ogni punto $p'(\alpha', \beta')$ di σ, rappresenteremo con $\overline{U}_1(\alpha', \beta')$, $\overline{U}_2(\alpha', \beta')$, $\overline{U}_3(\alpha', \beta')$, e che saranno finite e continue su tutta la superficie σ. Sussisteranno, inoltre, le formole (loc. cit.):

$$\overline{U}_1(\alpha', \beta') = - X_\sigma(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) . X_\sigma(\alpha, \beta) \, d\sigma ,$$

$$\overline{U}_2(\alpha', \beta') = - Y_\sigma(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X''_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) . X_\sigma(\alpha, \beta) \, d\sigma ,$$

$$\overline{U}_3(\alpha', \beta') = - Z_\sigma(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X'''_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) . X_\sigma(\alpha, \beta) \, d\sigma .$$

Ma allora, per la supposta equivalenza in S, dei doppî strati elastici W_1, W_2 e W_3 ai semplici strati U_1, U_2 e U_3, dovranno pure esistere su σ, e dalla banda dello spazio S, le componenti delle pseudo-tensioni corrispondenti ai doppî strati W_1, W_2 e W_3: indichiamole rispettivamente con $\overline{W}_1(\alpha', \beta')$, $\overline{W}_2(\alpha', \beta')$ e $\overline{W}_3(\alpha', \beta')$.

Dunque, ammessa l'esistenza dei semplici strati elastici U_1, U_2 ed U_3, ossia delle funzioni X_σ, Y_σ e Z_σ, finite e continue nei punti di σ, risulta che *condizione necessaria* per la trasformabilità, nel campo finito S, dei doppî strati elastici (1) nei semplici strati (2), è la esistenza, dalla banda interna di σ, delle pseudo-tensioni corrispondenti ai doppî strati elastici proposti e che siano, inoltre, finite e continue su σ.

Reciprocamente, supponiamo che, dati i pseudo-doppî strati elastici $W_1(\xi,\eta,\zeta)$, $W_2(\xi,\eta,\zeta)$ e $W_3(\xi,\eta,\zeta)$, esistano le componenti $\overline{W}_1(\alpha',\beta')$, $\overline{W}_2(\alpha',\beta')$ e $\overline{W}_3(\alpha',\beta')$ delle pseudo-tensioni dalla faccia interna di σ, e siano finite e continue sopra σ; potremo allora scrivere il seguente sistema di equazioni integrali di seconda specie:

$$(4)\quad \begin{cases} \overline{W}_1(\alpha',\beta') = -X_\sigma(\alpha',\beta') + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma X'_\sigma(\alpha',\beta'\;;\;\alpha,\beta).X_\sigma(\alpha,\beta)\,d\sigma, \\ \overline{W}_2(\alpha',\beta') = -Y_\sigma(\alpha',\beta') + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma X''_\sigma(\alpha',\beta'\;;\;\alpha,\beta).X_\sigma(\alpha,\beta)\,d\sigma, \\ \overline{W}_3(\alpha',\beta') = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

dove X'_σ, Y'_σ, Z'_σ, X''_σ, ... X'''_σ, ... sono, come è stato già specificato innanzi, le tensioni corrispondenti alle deformazioni fondamentali del Somigliana, e X_σ, Y_σ, Z_σ rappresentano tre funzioni incognite. Ci proponiamo di dimostrare che il sistema (4) ammette certamente una soluzione finita e continua, ossia che le funzioni X_σ, Y_σ, Z_σ esistono e sono finite e continue sopra σ.

Si consideri, pertanto, il sistema di equazioni integrali omogenee, corrispondente al sistema (4),

$$(5)\quad \begin{cases} 0 = -X_1(\alpha',\beta') + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma X'_\sigma(\alpha',\beta'\;;\;\alpha,\beta).X_1(\alpha,\beta)\,d\sigma, \\ 0 = -Y_1(\alpha',\beta') + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma X''_\sigma(\alpha',\beta'\;;\;\alpha,\beta).X_1(\alpha,\beta)\,d\sigma, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

e si consideri, inoltre, il sistema omogeneo, coniugato del precedente,

$$(6)\quad \begin{cases} 0 = -X_2(\alpha',\beta') + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma X'_\sigma(\alpha,\beta\;;\;\alpha',\beta').X_2(\alpha,\beta)\,d\sigma, \\ 0 = -Y_2(\alpha',\beta') + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma X''_\sigma(\alpha,\beta\;;\;\alpha',\beta').X_2(\alpha,\beta)\,d\sigma, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{cases}$$

Si può dimostrare (IV, § 4) che il sistema (6) ammette le tre soluzioni linearmente indipendenti

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{lll} X_2^{(1)}(\alpha', \beta') = a, & Y_2^{(1)}(\alpha', \beta') = 0, & Z_2^{(1)}(\alpha', \beta') = 0; \\ X_2^{(2)}(\alpha', \beta') = 0, & Y_2^{(2)}(\alpha', \beta') = b, & Z_2^{(2)}(\alpha', \beta') = 0; \\ X_2^{(3)}(\alpha', \beta') = 0, & Y_2^{(3)}(\alpha', \beta') = 0, & Z_2^{(3)}(\alpha', \beta') = c; \end{array}\right.$$

dove a, b e c rappresentano tre costanti arbitrarie, e che non ammette altre soluzioni fuori di quelle. Pertanto, in virtù della teoria del Fredholm, seguirà che, affinchè il sistema (4) ammetta soluzioni, è necessario e sufficiente che le funzioni $\overline{W}_1$, $\overline{W}_2$ e $\overline{W}_3$ soddisfino alle condizioni:

$$\int_\sigma \left\{ \overline{W}_1(\alpha, \beta) . X_2^{(1)}(\alpha, \beta) + \overline{W}_2(\alpha, \beta) . Y_2^{(1)}(\alpha, \beta) + \overline{W}_3(\alpha, \beta) . Z_2^{(1)}(\alpha, \beta) \right\} d\sigma = 0,$$

$$\int_\sigma \left\{ \overline{W}_1(\alpha, \beta) . X_2^{(2)}(\alpha, \beta) + \overline{W}_2(\alpha, \beta) . Y_2^{(2)}(\alpha, \beta) + \ldots\ldots \right\} d\sigma = 0,$$

$$\int_\sigma \left\{ \overline{W}_1(\alpha, \beta) . X_2^{(3)}(\alpha, \beta) + \ldots\ldots\ldots\ldots \right\} d\sigma = 0;$$

ossia, per le (7), alle condizioni seguenti:

$$\int_\sigma \overline{W}_1(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0, \quad \int_\sigma \overline{W}_2(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0, \quad \int_\sigma \overline{W}_3(\alpha, \beta)\, d\sigma = 0.$$

Ma queste condizioni sono certamente soddisfatte, giacchè le $\overline{W}_1(\alpha, \beta)$, $\overline{W}_2(\alpha, \beta)$ e $\overline{W}_3(\alpha, \beta)$ sono le componenti delle pseudo-tensioni relative alle deformazioni $W_1(\xi, \eta, \zeta)$, $W_2(\xi, \eta, \zeta)$, $W_3(\xi, \eta, \zeta)$ (I, § 14); quindi il sistema di equazioni integrali (4) ammetterà certamente soluzioni.

Indichiamo con $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$ una soluzione del sistema (4) e rappresentiamo, inoltre, con

$$\begin{array}{lll} X_1^{(1)}(\alpha, \beta), & Y_1^{(1)}(\alpha, \beta), & Z_1^{(1)}(\alpha, \beta), \\ X_1^{(2)}(\alpha, \beta), & Y_1^{(2)}(\alpha, \beta), & Z_1^{(2)}(\alpha, \beta), \\ X_1^{(3)}(\alpha, \beta), & Y_1^{(3)}(\alpha, \beta), & Z_1^{(3)}(\alpha, \beta), \end{array}$$

tre sistemi di soluzioni linearmente indipendenti delle (5) (si sa che, come per le (6), ne esistono tre soli linearmente indipendenti); la più generale soluzione del sistema (4) sarà allora così espressa:

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} X_\sigma(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta) + m X_1^{(1)}(\alpha, \beta) + n X_1^{(2)}(\alpha, \beta) + p X_1^{(3)}(\alpha, \beta), \\ Y_\sigma(\alpha, \beta) = \psi(\alpha, \beta) + m Y_1^{(1)}(\alpha, \beta) + n Y_1^{(2)}(\alpha, \beta) + \ldots, \\ Z_\sigma(\alpha, \beta) = \chi(\alpha, \beta) + m Z_1^{(1)}(\alpha, \beta) + \ldots\ldots, \end{array}\right.$$

dove m, n e p indicano tre costanti arbitrarie.

Osserviamo che, sempre in virtù della teoria del Fredholm, le funzioni $X_1^{(i)}$, $Y_1^{(i)}$ e $Z_1^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ sono finite e continue nei punti di σ, e così pure le funzioni φ, ψ e χ; quindi anche $X_\sigma(\alpha, \beta)$, $Y_\sigma(\alpha, \beta)$ e $Z_\sigma(\alpha, \beta)$ saranno finite e continue sopra σ.

Ciò premesso, con la soluzione finita e continua X_σ, Y_σ e Z_σ del sistema (4) costruiamo gli strati elastici:

$$(9) \qquad \begin{cases} U_1(\xi, \eta, \zeta) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\sigma \Sigma X_\sigma u' \, d\sigma, \\ U_2(\xi, \eta, \zeta) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\sigma \Sigma X_\sigma u'' \, d\sigma, \\ U_3(\xi, \eta, \zeta) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\sigma \Sigma X_\sigma u''' \, d\sigma. \end{cases}$$

Poichè le densità X_σ, Y_σ e Z_σ di questi strati sono funzioni finite e continue dei punti di σ, varranno le formole (II, § 11):

$$\overline{U}_1(\alpha', \beta') = - X_\sigma(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma X'_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) . X_\sigma(\alpha, \beta) \, d\sigma,$$

$$\overline{U}_2(\alpha', \beta') = - Y_\sigma(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma X''_\sigma(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) . X_\sigma(\alpha, \beta) \, d\sigma,$$

$$\overline{U}_3(\alpha', \beta') = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

qualunque siano le costanti m, n e p; quindi, ricordando che X_σ, Y_σ e Z_σ sono soluzioni del sistema (4), avremo:

$$\overline{W}_1(\alpha', \beta') = \overline{U}_1(\alpha', \beta'), \quad \overline{W}_2(\alpha', \beta') = \overline{U}_2(\alpha', \beta'), \quad \overline{W}_3(\alpha', \beta') = \overline{U}_3(\alpha', \beta').$$

Si conclude che gli pseudo-doppî strati elastici W_1, W_2 e W_3 hanno, nei punti di σ, e dalla banda del campo finito S, le medesime pseudo-tensioni degli strati elastici (9), U_1, U_2 ed U_3; pertanto le $W_1(\xi, \eta, \zeta)$, $W_2(\xi, \eta, \zeta)$ e $W_3(\xi, \eta, \zeta)$, non potranno differire dalle $U_1(\xi, \eta, \zeta)$, $U_2(\xi, \eta, \zeta)$ ed $U_3(\xi, \eta, \zeta)$, rispettivamente, se non per una costante ciascuna (I, § 9).

Ma ora mostreremo che ci possiamo sempre giovare della arbitrarietà delle costanti m, n e p per fare in modo che le corrispondenti funzioni U_1, U_2 ed U_3 coincidano rispettivamente, nel campo S, con W_1, W_2 e W_3.

A tal fine, con le funzioni ben determinate $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$ e $\chi(\alpha, \beta)$, finite e continue sopra σ, costruiamo i seguenti strati elastici semplici:

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma \varphi(\alpha, \beta) \, u' \, d\sigma, \quad \Psi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma \varphi(\alpha, \beta) \, u'' \, d\sigma,$$

$$X(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Sigma \varphi(\alpha, \beta) \, u''' \, d\sigma.$$

Successivamente costruiamo:

con le funzioni $X_1^{(1)}$, $Y_1^{(1)}$ e $Z_1^{(1)}$, finite e continue su σ, i semplici strati

$$\lambda_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X_1^{(1)}(\alpha, \beta) . u' d\sigma \quad , \quad \mu_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X_1^{(1)}(\alpha, \beta) . u'' d\sigma ,$$

$$\nu_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X_1^{(1)}(\alpha, \beta) . u''' d\sigma ;$$

con le funzioni $X_1^{(2)}$, $Y_1^{(2)}$ e $Z_1^{(2)}$, pure finite e continue su σ, i semplici strati

$$\lambda_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X_1^{(2)}(\alpha, \beta) . u' d\sigma \quad , \quad \mu_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X_1^{(2)}(\alpha, \beta) . u'' d\sigma ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

e, finalmente, con le funzioni $X_1^{(3)} Y_1^{(3)} Z_1^{(3)}$, parimenti finite e continue su σ, gli strati semplici

$$\lambda_3(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X_1^{(3)}(\alpha, \beta) . u' d\sigma \ldots\ldots\ldots ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

In virtù della linearità delle formole (8), e avuto riguardo alle ultime posizioni fatte, le (9) si potranno quindi scrivere come appresso:

$$(10) \quad \begin{cases} U_1(\xi, \eta, \zeta) = \Phi(\xi, \eta, \zeta) + m\lambda_1(\xi, \eta, \zeta) + n\lambda_2(\xi, \eta, \zeta) + p\lambda_3(\xi, \eta, \zeta), \\ U_2(\xi, \eta, \zeta) = \Psi(\xi, \eta, \zeta) + m\mu_1(\xi, \eta, \zeta) + n\mu_2(\xi, \eta, \zeta) + \ldots , \\ U_3(\xi, \eta, \zeta) = X(\xi, \eta, \zeta) + m\nu_1(\xi, \eta, \zeta) + \ldots\ldots . \end{cases}$$

Ora si può dimostrare (IV, §§ 5 e 7) che le funzioni $\lambda_i(\xi, \eta, \zeta)$, $\mu_i(\xi, \eta, \zeta)$ e $\nu_i(\xi, \eta, \zeta)$, $(i = 1 . 2 , 3)$, assumono valori costanti in tutto il campo S: e questi valori costanti sono tali che, posto:

$$\lambda_1 = a' \quad , \quad \lambda_2 = a'' \quad , \quad \lambda_3 = a''' ,$$
$$\mu_1 = b' \quad , \quad \mu_2 = b'' \quad , \quad \mu_3 = b''' ,$$
$$\nu_1 = c' \quad , \quad \nu_2 = c'' \quad , \quad \nu_3 = c''' ,$$

il determinante delle nove quantità $a', b', c', a'', \ldots, a''', \ldots$ è diverso da zero. Per conseguenza, sarà sempre possibile di determinare m, n e p nelle equazioni (10) in guisa che si abbiano, entro il campo S,

$$U_1(\xi, \eta, \zeta) = W_1(\xi, \eta, \zeta) \quad , \quad U_2(\xi, \eta, \zeta) = W_2(\xi, \eta, \zeta) ,$$
$$U_3(\xi, \eta, \zeta) = W_3(\xi, \eta, \zeta) .$$

Riassumendo, dunque: *condizione necessaria e sufficiente affinchè gli pseudo-doppi strati elastici* $W_1(\xi, \eta, \zeta)$, $W_2(\xi, \eta, \zeta)$ e $W_3(\xi, \eta, \zeta)$ *proposti si possano trasformare, nel campo finito* S, *in strati elastici sem-*

plici equivalenti, con densità finite e continue, è che esistano e siano finite e continue sopra σ, le corrispondenti pseudo-tensioni di W_1, W_2 e W_3 *dalla banda di* S.

Similmente si potrebbe ragionare per il campo infinito S′ e si troverebbe che: *condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema di pseudo-doppî strati elastici si possa trasformare, nel campo infinito S′, in semplici strati elastici equivalenti, è che esistano, e siano finite e continue sopra σ, le componenti delle pseudo-tensioni dalla banda di S′.*

Vogliamo, infine, osservare che i precedenti teoremi costituiscono l'estensione all'elasticità di quelli che, per la teoria del potenziale, sono stati dimostrati dal prof. Lauricella [1] e dai quali risulta che condizione necessaria e sufficiente affinchè un doppio strato W si possa trasformare in un semplice strato equivalente, nel campo finito S o nel campo infinito S′, è che esistano e siano finite e continue lungo σ le due derivate normali di W, rispettivamente dalla banda di S e di S′.

Matematica. — *Sur les fonctions permutables de 2ième espèce.* Nota di J. Soula, presentata dal Socio V. Volterra.

Les solutions fondamentales de deux fonctions permutables de 2ième espèce sont liées par des relations qui font intervenir en général les fonctions principales [2]. Je voudrais indiquer rapidement dans cette Note les relations plus générales entre les fonctions principales.

1. Soient $K(xy)$, $N(xy)$ deux fonctions intégrables, permutables dans un intervalle ab. $N(xy)$ sera d'abord supposé de la forme

$$N(xy) = \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_i(x)\,\psi_i(y)\,.$$

Nous supposons les $\varphi_i(x)$, et aussi les $\psi_i(y)$, linéairement indépendants. On a, en exprimant que les deux fonctions sont permutables

$$\alpha_1(x)\,\psi_1(y) + \cdots + \alpha_n(x)\,\psi_n(y) = \varphi_1(x)\,\beta_1(y) + \cdots + \varphi_n(x)\,\beta_n(y) \tag{1}$$

$$\alpha_i(x) = \int_a^b K(xs)\,\varphi_i(s)\,ds \qquad \beta_i(y) = \int_a^b K(sy)\,\psi_i(s)\,ds\,.$$

Il est facile de déduire de (1), que les $\alpha_i(x)$ sont des fonctions linéaires de $\varphi_1(x) \ldots \varphi_n(x)$. Ils peuvent aussi être nuls.

[1] Nella Nota *Sull'equazione integrale di 1a specie*..... Rendic. della R. Accad. dei Lincei, vol. XIX, 1° sem. 1910.

[2] Rendiconti R. Accad. dei Lincei, ottobre 1912.