

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
ANNO CCCX.
1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° SEMESTRE.



ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Matematica. — *Sulle equazioni integrali*. Nota di JOSEPH PÉRÈS, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Geologia. — *Il Gothlandiano in Sardegna*. Nota dell'ingegnere MICHELE TARICCO, presentata dal Socio C. F. PARONA.

Le due Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *L'errore di ortogonalità nella scrittura di moti periodici*. Nota del dott. GIUSEPPE GIANFRANCESCHI, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Ogni volta che si vuole studiare graficamente un moto oscillatorio qualsiasi, si suol ricorrere allo sviluppo del moto in una curva sinusoidale, combinando il moto oscillatorio del punto che si considera con un moto traslatorio in direzione normale a quella dell'oscillazione.

Se la curva che così si ottiene deve essere sottoposta ad analisi interessa di sapere se nella trascrizione siano stati introdotti errori che abbiano potuto modificare i risultati. La difficoltà pratica, che si riscontra in qualsiasi caso di scrittura di curve tali, è la perfetta ortogonalità della direzione del movimento traslatorio con quello dell'oscillazione.

Si può asserire che praticamente le due direzioni non saranno mai esattamente ad angolo retto. A seconda dei casi, si potrà apprezzare un errore più o meno grande. Importa di sapere quale influenza nella curva che si ottiene porterà l'errore che si è commesso, o più praticamente, l'errore probabile che si è apprezzato.

Considero il caso più semplice: quello di un moto perfettamente sinusoidale. Qualunque altro caso più complesso si può ridurre a questo sviluppando la curva periodica in una serie di Fourier e considerando separatamente ciascun termine come un moto sinusoidale semplice.

Poniamo il moto oscillatorio sull'asse della y e il traslatorio su quello della x . Allora i due movimenti ci sono rappresentati dal sistema:

$$(1) \quad \begin{cases} y = a \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} \\ x = vt. \end{cases}$$

Se y è ortogonale ad x gli spostamenti dovuti al moto oscillatorio non daranno nessuna proiezione sopra x .

Allora, dal sistema (1), eliminando il tempo, si ricava l'equazione della sinusoide:

$$(2) \quad y = a \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{vT}.$$

Immaginiamo, invece, che il moto oscillatorio si compia sopra un asse y' che formi con y un piccolo angolo α (fig 1). Allora, mentre il punto che oscilla su y' compie la sua escursione da P a P' intorno alla posizione di equilibrio che supponiamo in O, la proiezione di questa elongazione non è più zero, ma è eguale a $PP' \cos (90-\alpha)$, ossia a $2a \operatorname{sen} \alpha$.

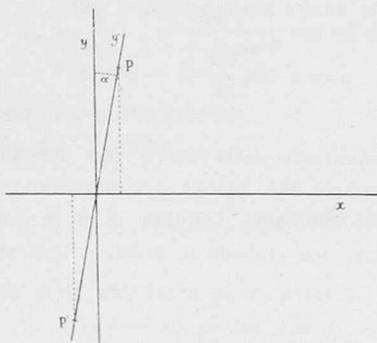


FIG. 1.

E quindi il cammino lungo x viene diminuito mentre il punto va da P verso P', ed accresciuto quando il punto stesso va da P' verso P, di una grandezza $2a \operatorname{sen} \alpha$. Questo ritardo e questo accrescimento poi si compiono con legge sinusoidale con lo stesso periodo e con la stessa fase del moto oscillatorio lungo y' e con una ampiezza massima $a \operatorname{sen} \alpha$.

Così il moto secondo x è dato da:

$$(3) \quad x = vt + a \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}.$$

Per l'asse y il moto non sarà altro se non la proiezione di quello che si compie su y' , e quindi un moto oscillatorio dello stesso periodo e fase di quello ma d'ampiezza $a' = a \cos \alpha$.

Allora il sistema (1) si modifica, nel caso nostro, così:

$$(4) \quad \begin{cases} y = a' \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} \\ x = vt + a \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} \end{cases}.$$

Per eliminare la t fra queste equazioni, e per ottenere la equazione della curva risultante, possiamo operare così:

Introduciamo nella 2^a delle (4) il valore di y ricavato dalla 1^a. Avremo, ricordando che $a = \frac{a'}{\cos. \alpha}$,

$$x = vt + y \operatorname{tg} \alpha,$$

e quindi

$$t = \frac{x - y \operatorname{tg} \alpha}{v}.$$

Sostituendo questo valore nella prima, si avrà

$$(5) \quad y = a' \operatorname{sen} \frac{2\pi}{vT} (x - y \operatorname{tg} \alpha).$$

Questa è già l'equazione della curva. Ma possiamo porla sotto una forma più atta. Osserviamo che, poichè α è piccolissimo, possiamo a $\operatorname{tg} \alpha$ sostituire l'arco α ; solo dobbiamo ricordare, d'ora in poi, che α non potrà essere misurato in gradi, ma sibbene in archi. Allora avremo:

$$y = a' \operatorname{sen} \frac{2\pi}{vT} (x - \alpha y)$$

e, sviluppando,

$$y = a' \left(\operatorname{sen} \frac{2\pi x}{vT} \cos \frac{2\pi \alpha y}{vT} - \cos \frac{2\pi x}{vT} \operatorname{sen} \frac{2\pi \alpha y}{vT} \right);$$

e ponendo

$$\cos \frac{2\pi \alpha y}{vT} = 1 \quad ; \quad \operatorname{sen} \frac{2\pi \alpha y}{vT} = \alpha y,$$

si otterrà

$$y = a' \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{vT} - \alpha y \cos \frac{2\pi x}{vT},$$

da cui, infine,

$$y = a' \frac{\operatorname{sen} \frac{2\pi x}{vT}}{1 + \alpha \cos \frac{2\pi x}{vT}}.$$

Per lo studio della curva ci importa ora di sviluppar questa funzione in serie di Fourier.

Scriviamo perciò semplicemente

$$y = \frac{\operatorname{sen} \xi}{1 + \alpha \cos \xi}.$$

I coefficienti della serie di Fourier sono, in generale, della forma

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi) \operatorname{sen} m\xi \, d\xi$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi) \cos m\xi \, d\xi.$$

Nel caso nostro saranno dunque:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \xi}{1 + \alpha \cos \xi} \operatorname{sen} m\xi \, d\xi$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \xi}{1 + \alpha \cos \xi} \cos m\xi \, d\xi.$$

Si tratta di eseguire queste integrazioni.

Cominciano da a_m . Poniamo

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \xi}{1 + \alpha \cos \xi} \operatorname{sen} m\xi \, d\xi.$$

Tenendo conto della piccolezza di α , avremo

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} \xi (1 - \alpha \cos \xi) \operatorname{sen} m\xi \, d\xi,$$

e, separando

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} \xi \operatorname{sen} m\xi \, d\xi - \alpha \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} \xi \cos \xi \operatorname{sen} m\xi \, d\xi$$

e poichè

$$\operatorname{sen} \xi \cos \xi = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\xi,$$

sarà

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} \xi \operatorname{sen} m\xi \, d\xi - \frac{\alpha}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 2\xi \operatorname{sen} m\xi \, d\xi.$$

Poniamo $J_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} \xi \operatorname{sen} m\xi \, d\xi$ e $J_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 2\xi \operatorname{sen} m\xi \, d\xi$; questi due

integrali sono della forma

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} n\xi \operatorname{sen} m\xi \, d\xi$$

e, quindi, ben noti.

Si sa che in questi integrali si ha sempre per risultato zero, ogni volta che $n \neq m$, e si ha invece π quando $n = m$.

Nel caso nostro, per $m = 1$ si annullerà l'integrale J_2 , e il primo integrale J_1 sarà $= \pi$; per $m = 2$, J_1 sarà nullo ed $J_2 = \pi$; per $m > 2$, saranno sempre nulli tanto J_1 quanto J_2 .

Allora, per i coefficienti a_m , avremo

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= -\frac{\alpha}{2} \\ a_3 &= a_4 = \dots = a_m = \dots = 0. \end{aligned}$$

Se ripetiamo considerazioni analoghe per i coefficienti b , gli integrali J_1 ed J_2 che vi compariscono sono della forma

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } n\xi \cos m\xi d\xi,$$

e quindi sono tutti nulli; dunque

$$b_1 = b_2 = \dots = b_m = \dots = 0.$$

Allora lo sviluppo in una serie di Fourier della forma

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 \text{sen } \xi + a_2 \text{sen } 2\xi + \dots \\ &\quad + b_1 \cos \xi + b_2 \cos 2\xi + \dots \end{aligned}$$

nel caso nostro si riduce a

$$(7) \quad y = a_0 + \text{sen } \xi - \frac{\alpha}{2} \text{sen } 2\xi.$$

Sappiamo, poi, che a_0 si può render nullo scegliendo opportunamente l'asse delle ξ e precisamente nel modo in cui lo abbiamo supposto per x nel nostro problema.

Se dunque torniamo a dare a ξ la forma che aveva e torniamo a porre il coefficiente a' , avremo

$$(8) \quad y = a' \text{sen } \frac{2\pi x}{vT} - \frac{\alpha}{2} a' \text{sen } 2 \frac{2\pi x}{vT}.$$

Questa formula ci dice che l'errore di ortogonalità, che si è supposto esistere, ha fatto sì che, invece di avere una sinusoide data da

$$y = a \text{sen } \frac{2\pi x}{vT}$$

si ha una curva periodica data dalla (8), in cui l'ampiezza massima a si

è ridotta ad $a' = a \cos \alpha$, e alla oscillazione fondamentale si è aggiunto il 2° armonico con un'ampiezza ridotta ad $a' \frac{\alpha}{2}$.

I punti nodali di ordine pari di questo armonico coincideranno sempre coi punti nodali della curva fondamentale.

Di più, nel tratto fra 0 e $\frac{\lambda}{4}$, essendo λ la lunghezza d'onda della curva fondamentale, gli spostamenti dovuti alle due curve sono di segno opposto. L'andamento è dunque quello rappresentato nella figura 2. Se l'angolo delle due direzioni y' ed x , invece di essere dato da $90 - \alpha$, fosse $90 + \alpha$, il secondo armonico sarebbe in concordanza di fase col fondamentale.

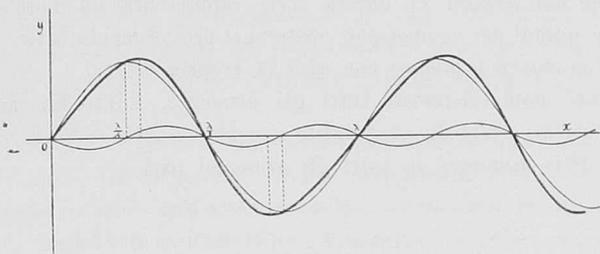


FIG. 2.

Nella curva risultante i punti di massimo e di minimo non corrispondono più ai valori $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}$ ecc. ma sono ravvicinati da una parte e dall'altra ai valori $x = \frac{\lambda}{2} = \frac{3\lambda}{2}$ ecc. nel caso di α negativo.

La curva ha dunque l'aspetto di una senoide adagiata nel senso istesso della inclinazione dell'asse y' .

Quando dunque si tratta di un semplice moto sinusoidale, sarà facile riscontrare sulla curva ottenuta l'esattezza della ortogonalità dei movimenti. Basterà misurare nella direzione della x la distanza fra un massimo e il minimo successivo.

Questa distanza nella senoide perfetta è data da $\frac{\lambda}{2}$, nel caso presente invece è $\frac{\lambda}{2} \mp 2a \sin \alpha$.

Per formarsi un'idea dell'entità dell'errore supponiamo $\alpha = 1^\circ$. Allora l'ampiezza del secondo armonico che si introduce sarà $\frac{\alpha}{2} a'$, e, prendendo,

invece di a' il valore di a che ne differisce di pochissimo, e calcolando α sul cerchio di raggio a quell'ampiezza diventa $\frac{2.3.14}{2.360} a$, ossia $0.0087a$.

Per l'errore di 1° si ha dunque un secondo armonico che è circa un centesimo dell'ampiezza principale.

Ora, un errore di 1° è ancora troppo visibile, e generalmente il valore di α non supera il $\frac{1}{2}$ grado, anche se soltanto ad occhio se ne apprezza l'ortogonalità; quindi possiamo dire che l'ampiezza dell'armonico che si introduce non supera il mezzo centesimo dell'ampiezza principale.

Tutto questo che si è detto si può estendere facilmente al caso in cui non si parta da un moto oscillatorio semplice, ma bensì da un moto periodico qualsiasi.

Infatti, quel moto potrà sempre svilupparsi in una serie di Fourier.

Ognuno dei termini di questa serie rappresenta un moto sinusoidale semplice, e quindi per ognuno può ripetersi il procedimento fatto, ed ognuno introdurrà un nuovo armonico che sarà la propria ottava.

E se nel moto esistessero tutti gli armonici, l'introduzione degli armonici dovuti all'errore di ortogonalità si esplicherebbe soltanto in una modificazione delle ampiezze in tutti gli armonici pari.

Chimica. — *L'impiego del Cupferron nell'analisi quantitativa* (1). Nota di I. BELLUCCI e L. GRASSI, presentata dal Socio E. PATERNO.

Due o tre anni fa, Baudisch (2) ha introdotto nell'analisi quantitativa minerale l'uso della nitroso-fenil-idrossilammina $C_6H_5 \cdot (NO) \cdot N \cdot OH$, i cui sali di rame e ferrico,



sono completamente insolubili in ambiente acido e si prestano perciò, dopo calcinazione, ad una rapida ed esatta determinazione ponderale di questi due metalli in presenza di un gran numero di altri che in tali condizioni non generano precipitati con la base suddetta.

In luogo della nitrosofenilidrossilammina libera, Baudisch, per ragioni di stabilità ha però consigliato l'impiego del relativo sale di ammonio $C_6H_5 \cdot (NO) \cdot N \cdot ONH^4$, al quale ha assegnato il nome di « cupferron » fornendo indicazioni precise per una rapida preparazione di tale reattivo (3)

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Chemik. Zeitung, 33, 1298 (1909).

(3) Chemik. Zeitung, 35, 913 (1911).