ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 marzo 1913.

F. D'Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra le funzioni permutabili di 2ª specie.* Nota del Corrispondente G. Lauricella [1].

Il concetto di permutabilità delle funzioni, introdotto dal prof. Volterra [2], ha nell'algebra delle funzioni permutabili il medesimo valore che ha nell'algebra ordinaria la proprietà permutativa dell'ordinario prodotto; ed un primo problema che si presenta, nello sviluppo di tale algebra, è la ricerca della più generale funzione permutabile con una data funzione. Questo problema, per la permutabilità di 2ª specie, fu studiato dal prof. Sinigallia [3] nel caso che la funzione data di due variabili sia la somma di un numero finito di prodotti di due funzioni ciascuna di una sola variabile. Pure in questo caso il prof. Volterra [4] mostrò che il problema può ricondursi alla ricerca, che Egli aveva altra volta eseguita [5], di tutte le sostituzioni permutabili con una data sostituzione; e fece un'elegante applicazione del problema stesso alla risoluzione di un'equazione integrale, aggiungendo delle

(1) Questa Nota venne scritta dal prof. Lauricella alla fine del dicembre u. s. pochi giorni prima che fosse colpito dalla malattia che doveva condurlo rapidamente al sepolcro.
Uno degli ultimi desiderii da lui manifestati fu che questa Nota venisse pubblicata nei Rendiconti dell'Accademia. Colla presentazione fatta ho adempiuto il voto del compianto Collega. V. Volterra.

(2) *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XIX, ser. 5ª, 1º sem. 1910.

(3) *Sulle funzioni permutabili di 2ª specie*, Ibid., vol. XX, ser. 5ª, 1º sem. 1911.

(4) *Sopra le funzioni permutabili di 2ª specie e le equazioni integrali*, Ibid.

(5) *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari*, Mem. della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), ser. 3ª, tomo XII.

importanti osservazioni per il caso delle funzioni simmetriche. Recentemente poi il sig. J. Soula [1] studiò le relazioni che hanno luogo tra due funzioni permutabili e la funzione risultante dalla loro composizione, deducendone delle notevoli proprietà per il caso della simmetria.

Nella presenta Nota stabilisco dapprima le condizioni necessarie e sufficienti per la permutabilità nel caso generale, esprimendole mediante un sistema di infinite equazioni integrali, il quale nel caso particolare studiato dal prof. Sinigallia rientra in quei sistemi di equazioni integrali studiati nel § 1 della mia Nota: *Sulla distribuzione della massa nell'interno dei pianeti* [2]. Indi trasformo queste condizioni in modo da potere scrivere in ogni caso, senza limitazione alcuna, la soluzione generale del problema.

Il caso della simmetria, come risulta già dalla Nota del prof. Volterra [3] e da quella del sig. Soula, presenta un particolare interesse; ed io qui, in vista delle applicazioni che mi è occorso di farne per la risoluzione di alcune equazioni integrali in una Memoria: *Sopra l'algebra delle funzioni permutabili simmetriche*, che sarà quanto prima pubblicata, stabilisco alcune proprietà delle funzioni permutabili simmetriche, che valgono a mettere in evidenza gli elementi analitici, dai quali dipende essenzialmente la proprietà della permutabilità in questo caso.

Debbo avvertire che in ciò che segue saranno considerate come uguali in un certo campo due funzioni che hanno gli stessi valori in tutti i punti di tale campo, fatta eccezione al più per i punti di un insieme di misura nulla.

§ 1. — Condizione necessaria e sufficiente per la permutabilità.

1. Siano $p(x,y)$, $q(x,y)$ due funzioni sommabili insieme ai loro quadrati nel campo $\sigma \equiv \{a \leq x \leq b\ ,\ a \leq y \leq b\}$ e inoltre nel campo $(a \leq x \leq b)$ per ogni valore di y, nel campo $(a \leq y \leq b)$ per ogni valore di x.

Indichiamo con

$$(1) \qquad \varphi_1(x)\,,\,\psi_1(y)\ ;\ \varphi_2(x)\,,\,\psi_2(y)\ ; \ldots$$

[1] *Sur la permutabilité de 2ième espèce*, Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XXI, 2° sem. 1912.

[2] Ibid., 1° sem.

[3] Ritengo che il prof. Lauricella volesse riferirsi a quanto si trova nel § 8 della mia citata Nota. In detto § non considero il caso della simmetria; ma la simmetria nasce allorchè si suppone che i coefficienti a_{is} siano tali che $a_{is} = a_{si}$. V. V.

la serie (finita o infinita) delle coppie di autofunzioni ortogonali del nucleo $p(x, y)$, e con

(2) $$p_1, p_2, \ldots$$

le corrispondenti serie di autovalori; ed indichiamo ancora con

(3) $$\theta_1(x), \theta_2(x), \ldots$$

la eventuale serie di funzioni ortogonali *complementare* [1] alla serie ortogonale delle $\varphi_i(x)$, ossia la eventuale serie che rende chiusa la serie delle $\varphi_i(x)$, e con

(4) $$\tau_1(y), \tau_2(y), \ldots$$

la eventuale serie di funzioni ortogonali complementare alla serie ortogonale delle $\psi_i(y)$.

Si avrà:

(5) $$\varphi_i(x) = p_i \int_a^b p(x, y)\, \psi_i(y)\, dy ,$$

(6) $$\psi_i(y) = p_i \int_a^b p(x, y)\, \varphi_i(x)\, dx ,$$

(7) $$0 = \int_a^b p(x, y)\, \theta_i(x)\, dx ,$$

(8) $$0 = \int_a^b p(x, y)\, \tau_i(y)\, dy .$$

2. Posto:

$$f_1(x, y) = \int_a^b p(x, \xi)\, q(\xi, y)\, d\xi \quad , \quad f_2(x, y) = \int_a^b q(x, \xi)\, p(\xi, y)\, d\xi ,$$

si avrà dalle (5), (6), (7), (8):

(9) $$\int_a^b \int_a^b f_1(x, y)\, \varphi_i(x)\, \psi_j(y)\, dx\, dy =$$
$$= \int_a^b \int_a^b \int_a^b p(x, \xi)\, q(\xi, y)\, \varphi_i(x)\, \psi_j(y)\, d\xi\, dx\, dy =$$
$$= \int_a^b \int_a^b q(\xi, y)\, \psi_j(y)\, d\xi\, dy \int_a^b p(x, \xi)\, \varphi_i(x)\, dx$$
$$= \frac{1}{p_i} \int_a^b \int_a^b q(\xi, y)\, \psi_i(\xi)\, \psi_j(y)\, d\xi\, dy ,$$

(9)′ $$\int_a^b \int_a^b f_2(x, y)\, \varphi_i(x)\, \psi_j(y)\, dx\, dy = \frac{1}{p_i} \int_a^b \int_a^b q(x, \xi)\, \varphi_i(x)\, \varphi_j(\xi)\, d\xi dx ,$$

[1] *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali e dei nuclei delle equazioni integrali*, Ibid.

$$(10) \qquad \int_a^b \int_a^b f_1(x, y)\, \varphi_i(x)\, \tau_j(y)\, dx\, dy = \frac{1}{p_i} \int_a^b \int_a^b q(\xi, y)\, \psi_i(\xi)\, \tau_j(y)\, d\xi\, dy,$$

$$(10)' \qquad \int_a^b \int_a^b f_2(x, y)\, \varphi_i(x)\, \tau_j(y)\, dx\, dy = 0,$$

$$(11) \qquad \int_a^b \int_a^b f_1(x, y)\, \theta_j(x)\, \psi_j(y)\, dx\, dy = 0,$$

$$(11)' \qquad \int_a^b \int_a^b f_2(x, y)\, \theta_i(x)\, \psi_j(x)\, dx\, dy = \frac{1}{p_i} \int_a^b \int_a^b q(x, \xi)\, \theta_i(x)\, \varphi_j(\xi)\, d\xi\, dx.$$

3. Ora facciamo l'ipotesi che le funzioni $p(x, y)$, $q(x, y)$ siano permutabili, ossia che si abbia:

$$(12) \qquad \int_a^b p(x, \xi)\, q(\xi, y)\, d\xi = \int_a^b q(x, \xi)\, p(\xi, y)\, d\xi\,;$$

sarà allora $f_1(x, y) = f_2(x, y)$; e quindi, in virtù delle (9), (9)', (10), (10)', (11), (11)', dovrà aversi:

$$(9)'' \qquad \int_a^b \int_a^b q(\xi, \eta) \left\{ \frac{\varphi_i(\xi)\, \varphi_j(\eta)}{p_j} - \frac{\psi_i(\xi)\, \psi_j(\eta)}{p_i} \right\} d\xi\, d\eta = 0,$$

$$(10)'' \qquad \int_a^b \int_a^b q(\xi, \eta)\, \psi_i(\xi)\, \tau_j(\eta)\, d\xi\, d\eta = 0,$$

$$(11)'' \qquad \int_a^b \int_a^b q(\xi, \eta)\, \theta_i(\xi)\, \varphi_j(\eta)\, d\xi\, d\eta = 0.$$

Viceversa, supponiamo che la funzione $q(x, y)$ soddisfaccia alle condizioni (9)'', (10)'', (11)''. Valendosi delle (9), (9)', (10), (10)', (11), (11)', risulterà, in virtù di queste condizioni,

$$(9)''' \qquad \int_a^b \int_a^b \{ f_1(x, y) - f_2(x, y) \}\, \varphi_i(x)\, \psi_j(y)\, dx\, dy = 0,$$

$$(10)''' \qquad \int_a^b \int_a^b \{ f_1(x, y) - f_2(x, y) \}\, \varphi_i(x)\, \tau_j(y)\, dx\, dy = 0,$$

$$(11)''' \qquad \int_a^b \int_a^b \{ f_1(x, y) - f_2(x, y) \}\, \theta_i(x)\, \psi_j(y)\, dx\, dy = 0.$$

Per altro si ha, in virtù delle (7), (8),

$$\int_a^b \int_a^b f_1(x, y)\, \theta_i(x)\, \tau_j(y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_a^b \int_a^b \int_a^b p(x, \xi)\, q(\xi, y)\, \theta_i(x)\, \tau_j(y)\, d\xi\, dx\, dy = 0,$$

$$\int_a^b \int_a^b f_2(x, y)\, \theta_i(x)\, \tau_j(y)\, dx\, dy = 0\,;$$

sicchè risulterà ancora:

$$\int_a^b \int_a^b \{ f_1(x, y) - f_2(x, y) \} \, \theta_i(x) \, \tau_j(y) \, dx \, dy = 0 \,. \tag{13}$$

Poichè le due serie $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... ; $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, ... insieme prese costituiscono una serie chiusa di funzioni ortogonali, e le altre due $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, ... ; $\tau_1(y)$, $\tau_2(y)$, ... insieme prese costituiscono anch'esse una serie ortogonale chiusa, si avrà (¹) che anche le quattro serie:

$$\varphi_i(x)\, \psi_j(y) \;, \quad \varphi_i(x)\, \tau_j(y) \;, \quad \theta_i(x)\, \psi_j(y) \;, \quad \theta_i(x)\, \tau_j(y)$$
$$(i, j = 1, 2, ...)$$

insieme prese costituiscono nel campo σ una serie chiusa di funzioni ortogonali; e quindi, in forza delle (9)‴, (10)‴, (11)‴, (13), dovrà aversi in tutto il campo σ, fatta eccezione al più per i punti di un insieme di misura nulla:

$$f_1(x, y) - f_2(x, y) = 0 \,,$$

ossia le funzioni $p(x, y)$, $q(x, y)$ dovranno essere permutabili.

Riepilogando si ha: *condizione necessaria e sufficiente affinchè le funzioni $p(x, y)$, $q(x, y)$ siano permutabili è che la funzione $q(x, y)$ soddisfaccia alle equazioni* (9)″, (10)″, (11)″.

§ 2. — Costruzione delle funzioni permutabili con una data funzione.

4. Consideriamo le tre serie di funzioni:

$$\frac{\varphi_i(x)\, \varphi_j(y)}{p_j} - \frac{\psi_i(x)\, \psi_j(y)}{p_i} \;, \quad \psi_i(x)\, \tau_j(y) \;, \quad \theta_i(x)\, \varphi_j(y) \,, \tag{14}$$
$$(i, j = 1, 2, ...) \,;$$

ed osserviamo che in certi casi qualcuna di queste serie può essere formata da un numero finito di funzioni o può anche mancare, e che in ogni caso le tre serie, insieme prese, sono formate da infinite funzioni. Queste tre serie di funzioni si possono sempre trasformare, ed in infiniti modi, in una serie semplice (²). Così, ad esempio, basterà scrivere dapprima le funzioni delle tre serie per le quali la somma $i + j$ degli indici sia uguale a 2, scrivere

(¹) Vedi la mia citata Memoria: *Sopra l'algebra delle funzioni permutabili.*

(²) Questa operazione non è essenziale, per il nostro scopo, ma apporta semplificazioni.

di seguito quelle per le quali la somma $i+j$ degli indici sia uguale a 3, ecc. Indichiamo con

$$(14)' \qquad \lambda_1(x, y), \lambda_2(x, y), \dots$$

le funzioni della serie semplice equivalente alle tre serie (14); e normalizziamo successivamente queste funzioni col noto procedimento di Gram. Si otterrà una serie ortogonale di funzioni della forma:

$$(14)'' \qquad \mu_n(x, y) =$$

$$= \frac{\lambda_{n_1}(x, y) - \sum_1^{n-1}{}_i\, \mu_i(x, y) \int_a^b \int_a^b \lambda_{n_1}(\xi, \eta)\, \mu_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{\int_a^b \int_a^b \left[\lambda_{n_1}(\xi, \eta) - \sum_1^{n-1}{}_i\, \mu_i(\xi, \eta) \int_a^b \int_a^b \lambda_{n_1}(\xi', \eta')\, \mu_i(\xi', \eta')\, d\xi' d\eta' \right]^2 d\xi\, d\eta}},$$

$$(n_1 \leq n);$$

ed inoltre una eventuale serie finita od infinita di relazioni della forma:

$$(15) \qquad \lambda_j(x, y) = \sum_1^{j_1}{}_i\, \mu_i(x, y) \int_a^b \int_a^b \lambda_j(\xi, \eta)\, \mu_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \qquad (j_1 \geq j-1),$$

corrispondenti ciascuna a quelle funzioni $\lambda_j(x, y)$ per le quali eventualmente risultasse:

$$\int_a^b \int_a^b \left[\lambda_j(\xi, \eta) - \sum_1^{j_1}{}_i\, \mu_i(\xi, \eta) \int_a^b \int_a^b \lambda_j(\xi', \eta')\, \mu_i(\xi', \eta')\, d\xi' d\eta' \right]^2 d\xi\, d\eta = 0.$$

La serie (14)″ si scrive immediatamente nel caso in cui la funzione $p(x, y)$ sia simmetrica. In questo caso, infatti, si ha:

$$\psi_i(x) = \varphi_i(x) \quad , \quad \tau_i(x) = \theta_i(x),$$

e le tre serie (14) si riducono alle tre seguenti:

$$(14)_1 \qquad \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{p_i}\right) \varphi_i(x)\, \varphi_j(y) \quad , \quad \varphi_r(x)\, \theta_s(y) \quad , \quad \theta_r(x)\, \varphi_s(y),$$

per tutti i possibili valori di r, s e per tutti i valori di i, j per cui $p_i \neq p_j$. La corrispondente serie ortogonale (14)″ si otterrà trasformando, secondo una legge qualsiasi, in serie semplici le tre serie ortogonali:

$$(14)_1'' \qquad \varphi_i(x)\, \varphi_j(y) \quad , \quad \varphi_r(x)\, \theta_s(y) \quad , \quad \theta_r(x)\, \varphi_s(y),$$

$$(i, j, r, s = 1, 2, \dots)$$

con la condizione $p_i \neq p_j$.

5. Ora vogliamo dimostrare che le condizioni (9)'', (10)'', (11)'' equivalgono alle altre:

$$\int_a^b \int_a^b q(\xi, \eta)\, \mu_n(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0, \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

Infatti, in virtù delle posizioni fatte, le (9)'', (10)'', (11)'' si possono scrivere sotto l'unica forma:

$$\int_a^b \int_a^b q(\xi, \eta)\, \lambda_n(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0, \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{16$'$}$$

Da questa e dalla (14)'' risulta per $n = 1$:

$$\int_a^b \int_a^b q(\xi, \eta)\, \mu_1(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0;$$

allora dalle medesime equazioni per $n = 2$ e dalla precedente risulterà:

$$\int_a^b \int_a^b q(\xi, \eta)\, \mu_2(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0;$$

e così seguitando risulteranno verificate tutte le (16).

Viceversa, si suppongano verificate le (16). Intanto è evidente che per le $\lambda_j(x, y)$ della forma (15) la (16)' sarà verificata. Per le $\lambda_n(x, y)$ che non rientrano nella forma (15), si ha dalla (14)'':

$$\lambda_{n_1}(x, y) = \sum_1^n {}_i\, a_i\, \mu_i(x, y),$$

con a_i coefficienti determinati, ed è evidente quindi che anche per esse la equazione (16)' è verificata.

6. Sia $\pi(x, y)$ una funzione arbitraria del campo σ, sommabile insieme al suo quadrato in questo campo e inoltre nel campo $(a \leq x \leq b)$ per ogni valore di y, nel campo $(a \leq y \leq b)$ per ogni valore di x; allora sarà sempre possibile [1], ed infiniti modi, determinare una serie di numeri, interi positivi e crescenti indefinitamente, $n_1, n_2, \ldots$ in modo che la serie:

$$\pi'(x, y) = \sum_1^{n_1} {}_i\, \mu_i(x, y) \int_a^b \int_a^b \pi(\xi, \eta)\, \mu_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta +$$
$$+ \sum_{n_1+1}^{n_2} {}_i\, \mu_i(x, y) \int_a^b \int_a^b \pi(\xi, \eta)\, \mu_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \cdots$$

sia in tutto il campo σ convergente uniformemente in generale, e *la più*

(1) Lauricella, *Sopra i nuclei reiterati*, § 2. Rendic. della R. Accad. dei Lincei, vol. XX, ser. 5ª, 1º sem., 1911.

generale funzione $q(x, y)$ permutabile con la funzione data $p(x, y)$ potrà scriversi sotto la forma:

$$q(x, y) = \pi(x, y) - \pi'(x, y). \tag{17}$$

Nel caso particolare in cui la funzione data $p(x, y)$ sia simmetrica, la più generale funzione permutabile con la funzione data $p(x, y)$, posto:

$$a_{ij} = \int_a^b \int_a^b \pi(\xi, \eta)\, \varphi_i(\xi)\, \varphi_j(\eta)\, d\xi\, d\eta\ ,\quad b_{rs} = \int_a^b \int_a^b \pi(\xi, \eta)\, \varphi_r(\xi)\, \theta_s(\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$c_{rs} = \int_a^b \int_a^b \pi(\xi, \eta)\, \theta_r(\xi)\, \varphi_s(\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

può scriversi sotto la forma:

$$\begin{aligned} q(x, y) = \pi(x, y) - \sum_{ij} a_{ij}\, \varphi_i(x)\, \varphi_j(y) - \\ - \sum_{rs} b_{rs}\, \varphi_r(x)\, \theta_s(y) - \sum_{rs} c_{rs}\, \theta_r(x)\, \varphi_s(y), \end{aligned} \tag{17$'$}$$

dove r ed s prendono tutti i valori possibili, i e j tutti i valori per cui $p_i \neq p_j$, e dove le tre serie al secondo membro sono convergenti uniformemente in generale, i loro termini essendo ordinati ed associati in modo conveniente.

Sempre nell' ipotesi che la $p(x, y)$ sia simmetrica, la più generale funzione simmetrica permutabile con la funzione $p(x, y)$ può esprimersi mediante la formola (17)$'$, con la condizione che la funzione arbitraria $\pi(x, y)$ sia simmetrica.

§ 3. — Proprietà delle funzioni permutabili simmetriche.

7. Siano per ipotesi $p(x, y)$, $q(x, y)$ funzioni permutabili e simmetriche; allora si avrà:

$$f(x, y) = \int_a^b p(x, \xi)\, q(\xi, y)\, d\xi = \int_a^b q(x, \xi)\, p(\xi, y) d\xi = f(y, x),$$

ossia la funzione $f(x, y)$ sarà simmetrica. Viceversa, supponiamo che le funzioni $p(x, y)$, $q(x, y)$ siano simmetriche e che sia inoltre simmetrica la funzione:

$$f(x, y) = \int_a^b p(x, \xi)\, q(\xi, y)\, d\xi\ . \tag{18}$$

Si avrà:

$$(18)' \quad \int_a^b p(x\,,\xi)\, q(\xi\,,y)\, d\xi = f(x\,,y) = f(y\,,x) =$$

$$= \int_a^b p(y\,,\xi)\, q(\xi\,,x)\, d\xi = \int_a^b q(x\,,\xi)\, p(\xi\,,y)\, d\xi\,,$$

ossia le funzioni $p(x\,,y)$, $q(x\,,y)$ saranno permutabili. Adunque si può enunciare il seguente teorema: *condizione necessaria e sufficiente affinchè le funzioni simmetriche $p(x\,,y)$, $q(x\,,y)$ siano permutabili è che la funzione $f(x\,,y)$, risultante dalla loro composizione, sia simmetrica.*

8. Posto:

$$(19) \qquad \alpha_i(y) = \int_a^b f(\xi\,,y)\, \varphi_i(\xi)\, d\xi\,;$$

e supposto che y abbia un valore costante, si avrà dalla (18), in virtù del teorema di sviluppabilità di Hilbert-Schmidt,

$$(20) \qquad f(x\,,y) = \sum_i \alpha_i(y)\, \varphi_i(x)\,,$$

e la serie al secondo membro sarà uniformemente convergente.

Tenendo conto della (18)', la (19) si può scrivere:

$$\alpha_i(y) = \int_a^b \int_a^b p(y\,,\xi)\, q(\xi\,,\eta)\, \varphi_i(y)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \int_a^b p(y\,,\xi) \left(\int_a^b q(\xi\,,\eta)\, \varphi_i(\eta)\, d\eta \right) d\xi\,;$$

e quindi, posto:

$$\alpha_{ij} = \int_a^b \alpha_i(\eta)\, \varphi_j(\eta)\, d\eta = \int_a^b \int_a^b f(\xi\,,\eta)\, \varphi_i(\xi)\, \varphi_j(\eta)\, d\xi\, d\eta\,,$$

si avrà, ancora in forza del teorema di sviluppabilità di Hilbert-Schmidt,

$$\alpha_i(y) = \sum \alpha_{ij}\, \varphi_j(y)\,,$$

e la serie al secondo membro sarà uniformemente convergente. Sostituendo nella (20), risulterà quindi:

$$(20)' \qquad f(x\,,y) = \sum_i \sum_j \alpha_{ij}\, \varphi_i(x)\, \varphi_j(y)\,.$$

Si può scrivere:

$$\alpha_{ij}=\int_a^b\int_a^b\int_a^b p(\xi,\zeta)\,q(\zeta,\eta)\,\varphi_i(\xi)\,\varphi_j(\eta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=$$

$$=\int_a^b\int_a^b q(\zeta,\eta)\,\varphi_j(\eta)\left(\int_a^b p(\xi,\zeta)\,\varphi_i(\xi)\,d\xi\right)d\eta\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{p_i}\int_a^b\int_a^b q(\zeta,\eta)\,\varphi_i(\zeta)\,\varphi_j(\eta)\,d\zeta\,d\eta\,;$$

sicchè, in virtù della permutabilità di $p(x,y)$ con $q(x,y)$ e della (9)″, per i e j tali che $p_i \neq p_j$ risulterà:

$$\alpha_{ij}=0\,;$$

e quindi, supposto in generale:

$$p_1=p_2=\cdots=p_{t_1}=\pi_1\quad,\quad p_{t_1+1}=p_{t_1+2}=\cdots=p_{t_1+t_2}=\pi_2\,,\ldots,$$

la (20)′ diverrà:

$$(20)''\qquad f(x,y)=\sum_{1}^{t_1}{}_i\sum_{1}^{t_1}{}_j\,\alpha_{ij}\,\varphi_i(x)\,\varphi_j(y)+\sum_{t_1+1}^{t_1+t_2}{}_i\sum_{t_1+1}^{t_1+t_2}{}_j\,\alpha_{ij}\,\varphi_i(x)\,\varphi_j(y)+\cdots$$

9. In virtù della simmetria di $f(x,y)$, si ha evidentemente $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$; e quindi le funzioni:

$$\mathrm{H}_1(x,y)=\sum_{1}^{t_1}{}_i\sum_{1}^{t_1}{}_j\,\alpha_{ij}\,\varphi_i(x)\,\varphi_j(y)\ ,\ \mathrm{H}_2(x,y)=\sum_{t_1+1}^{t_1+t_2}{}_i\sum_{t_1+1}^{t_1+t_2}{}_j\,\alpha_{ij}\,\varphi_i(x)\,\varphi_j(y)\,,\ldots$$

saranno simmetriche. Ciò premesso, siano rispettivamente:

$$(21)\qquad \chi_1(x)\,,\chi_2(x)\,,\ldots,\chi_{\tau_1}(x)\quad;\quad \chi_{\tau_1+1}(x)\,,\chi_{\tau_1+2}(x)\,,\ldots,\chi_{\tau_1+\tau_2}(x)\,;\ldots$$

i gruppi di autofunzioni normalizzate dei nuclei $\mathrm{H}_1(x,y)$, $\mathrm{H}_2(x,y)$, ...; e siano:

$$f_1\,,f_2\,,\ldots,f_{\tau_1}\quad;\quad f_{\tau_1+1}\,,f_{\tau_1+2}\,,\ldots,f_{\tau_1+\tau_2}\,;\ldots$$

i corrispondenti gruppi di autovalori. Si avrà (1):

$$\tau_1 \leq t_1\,,\ \tau_2 \leq t_2\,, \ldots; \tag{22}$$

$$\chi_1(x) = h_{11}\ \varphi_1(x) + h_{12}\ \varphi_2(x) + \cdots + h_{1t_1}\ \varphi_{t_1}(x)\,,$$

. . . .

$$\chi_{\tau_1}(x) = h_{\tau_1 1}\ \varphi_1(x) + h_{\tau_1 2}\ \varphi_2(x) + \cdots + h_{\tau_1 t_1}\ \varphi_{t_1}(x)\,;$$

$$\chi_{\tau_1+1}(x) = k_{11}\ \varphi_{t_1+1}(x) + k_{12}\ \varphi_{t_1+2}(x) + \cdots + k_{1t_2}\ \varphi_{t_1+t_2}(x)\,,$$

. . . .

$$\chi_{\tau_1+\tau_2}(x) = k_{\tau_2 1}\ \varphi_{t_1+1}(x) + k_{\tau_2 2}\ \varphi_{t_1+2}(x) + \cdots + k_{\tau_2 t_2}\ \varphi_{t_1+t_2}(x)\,;$$

. . . . ;

e quindi le funzioni dei gruppi (21), insieme prese, costituiranno una serie di funzioni ortogonali, e la (20)″ diverrà:

$$f(x\,,y) = \sum_i \frac{\chi_i(x)\ \chi_i(y)}{f_i}\,, \tag{20'''}$$

la serie al secondo membro essendo uniformemente convergente nel campo $(a \leq x \leq b)$ per ogni valore di y, nel campo $(a \leq y \leq b)$ per ogni valore di x.

10. Notiamo che le $\chi_1(x)\,,\chi_2(x)\,,\ldots\,\chi_{\tau_1}(x)$ sono autofunzioni di $p(x\,,y)$ corrispondenti all'autovalore π_1; $\chi_{\tau_1+1}(x)\,,\ldots\,\chi_{\tau_1+\tau_2}(x)$ all'autovalore π_2; ...; sicchè, indicando generalmente con p'_i l'autovalore di $p(x\,,y)$ corrispondente all'autofunzione $\chi_i(x)$, sarà:

$$\chi_i(x) = p'_i \int_a^b p(x\,,y)\ \chi_i(y)\ dy\,, \tag{23}$$

e in virtù delle (22), si avrà che la serie $p'_1\,, p'_2\,, \ldots$ è certamente contenuta nella serie $p_1\,, p_2\,, \ldots$; ed allora, essendo la serie $\sum_i \frac{1}{p_j^2}$ convergente, sarà pure convergente la serie $\sum_i \frac{1}{p_i'^2}$; e quindi (2) esisterà una funzione simmetrica $p'(x\,,y)$ ed una solamente, sommabile insieme al suo quadrato nel campo σ, e nel campo $a \leq x \leq b$ per ogni valore di y, nel campo $a \leq$ $\leq y \leq b$ per ogni valore di x, la quale abbia per autofunzioni tutte e

(1) Lauricella, *Sopra alcune equazioni integrali*, § 2, Rendic. della R. Accad. dei Lincei, vol. XVII, ser. 5a, 1o sem., 1908.

(2) Lauricella, *Sopra i nuclei reiterati*, § 3, pag. 893, Rendic. della R. Accad. dei Lincei, vol. XX, ser. 5a, 1o sem., 1911.

sole le $\chi_i(x)$ della serie (21) e per corrispondenti autovalori $p'_1, p'_2, \ldots$ rispettivamente, ossia tale che:

$$\chi_i(x) = p'_i \int_a^b p'(x, y)\, \chi_i(y)\, dy \,. \tag{23'}$$

Posto poi:

$$p(x, y) = p'(x, y) + p''(x, y) \,,$$

risulterà per tutti i possibili valori di i:

$$\int_a^b p''(x, y)\, \chi_i(y)\, dy = 0 \,; \tag{24}$$

e quindi [1]:

$$\int_a^b p'(x, \eta)\, p''(\eta, y)\, d\eta = 0 \,, \tag{25}$$

e per la simmetria di $p'(x, y)$ e di $p''(x, y)$:

$$\int_a^b p''(x, \eta)\, p'(\eta, y)\, d\eta = 0 \,, \tag{25'}$$

cioè, valendosi della locuzione introdotta da Goursat [2], *le funzioni simmetriche $p'(x, y)$, $p''(x, y)$ sono ortogonali*, ossia *le autofunzioni normalizzate di $p''(x, y)$ sono ortogonali a tutte le funzioni $\chi_i(x)$ della serie* (21).

11. Si ha dalla (23):

$$\int_a^b q(x, \eta)\, \chi_i(\eta)\, d\eta = p'_i \int_a^b \int_a^b q(x, \eta)\, p(\eta, y)\, \chi_i(y)\, d\eta\, dy =$$

$$= p'_i \int_a^b f(x, y)\, \chi_i(y)\, dy = \frac{p'_i}{f_i}\, \chi_i(x),$$

ossia, posto:

$$q'_i = \frac{p'_i}{f_i} \,,$$

si ha:

$$\chi_i(x) = q'_i \int_a^b q(x, \eta)\, \chi_i(\eta)\, d\eta \,; \tag{26}$$

sicchè tutte le funzioni della serie ortogonale (21) sono autofunzioni del nucleo $q(x, y)$, corrispondenti rispettivamente agli autovalori:

$$q'_1 = \frac{p'_1}{f_1} \,,\ q'_2 = \frac{p'_2}{f_2} \,, \ldots$$

(1) Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, § 9, Mathematische Annalen, LXIII.

(2) Goursat, *Recherches sur les équations intégrales linéaires*, Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, 2e sér., X.

In virtù delle condizioni di sommabilità, poste fin da principio, per la funzione $q(x, y)$, si ha che la serie $\sum_i \frac{1}{q_i'^2}$ è convergente; e perciò esisterà una funzione simmetrica $q'(x, y)$ ed una solamente, avente per autofunzioni tutte e sole le funzioni $\chi_i(x)$ e per corrispondenti autovalori le costanti q_i'. In questo modo, insieme alla (26), si avrà:

$$(26') \qquad \chi_i(x) = q_i' \int_a^b q'(x, \eta)\, \chi_i(\eta)\, d\eta\,;$$

e quindi, posto:

$$q(x, y) = q'(x, y) + q''(x, y),$$

risulterà per tutti i possibili valori di i:

$$(27) \qquad \int_a^b q''(x, \eta)\, \chi_i(\eta)\, d\eta = 0\,;$$

donde segue che *le funzioni* $q'(x, y)$, $q''(x, y)$ *sono tra loro ortogonali*, ovvero che *le autofunzioni normalizzate del nucleo* $q''(x, y)$ *sono ortogonali a tutte le funzioni* $\chi_i(x)$ *delle serie* (21).

12. Posto:

$$f'(x, y) = \int_a^b p'(x, \xi)\, q'(\xi, y)\, d\xi,$$

risulta:

$$(28) \qquad f_i \int_a^b f'(x, y)\, \chi_i(y)\, dy = f_i \int_a^b \int_a^b p'(x, \xi)\, q'(\xi, y)\, \chi_i(y)\, d\xi\, dy =$$

$$= \frac{f_i}{q_i'} \int_a^b p'(x, \xi)\, \chi_i(\xi)\, d\xi = \frac{f_i}{p_i' q_i'}\, \chi_i(x) = \chi_i(x)\,;$$

e se $\chi'(x)$ è una funzione qualsiasi ortogonale alle funzioni $\chi_i(x)$ della serie (21), si avrà:

$$\int_a^b q'(\xi, y)\, \chi'(y)\, dy = 0\,;$$

e quindi ancora:

$$(29) \qquad \int_a^b f'(x, y)\, \chi'(y)\, dy = \int_a^b \int_a^b p'(x, \xi)\, q'(\xi, y))\, \chi'(y)\, d\xi\, dy = 0\,.$$

Dalle (28), (29) segue che la funzione $f'(x, y)$ ammette come autofunzioni tutte e sole le funzioni della serie (21) e come corrispondenti autovalori le f_i; quindi essa coincide [1] con la funzione $f(x, y)$.

[1] Lauricella, *Sopra i nuclei reiterati*, loc. cit.

Rammentiamo che le funzioni $p'(x, y)$, $q'(x, y)$ hanno per autofunzioni tutte e sole le funzioni $\chi_i(x)$ della serie (21); per cui, in virtù della (24), *le funzioni* $p''(x, y)$, $q'(x, y)$ *sono ortogonali*, ed in virtù della (27), anche *le funzioni* $q''(x, y)$, $p'(x, y)$ *sono ortogonali.*

Ciò posto, avremo:

$$f(x, y) = \int_a^b p(x, \xi)\, q(\xi, y)\, d\xi =$$

$$= \int_a^b \{p'(x, \xi) + p''(x, \xi)\}\{q'(\xi, y) + q''(\xi, y)\}\, d\xi =$$

$$= \int_a^b p'(x, \xi)\, q'(\xi, y)\, d\xi + \int_a^b p''(x, \xi)\, q''(\xi, y)\, d\xi =$$

$$= f(x, y) + \int_a^b p''(x, \xi)\, q''(\xi, y)\, d\xi;$$

quindi:

$$\int_a^b p''(x, \xi)\, q''(\xi, y)\, d\xi = 0;$$

e in forza della simmetria:

$$\int_a^b q''(x, \xi)\, p''(\xi, x)\, d\xi = 0\,.$$

Queste due formole ci dicono che *le funzioni* $p''(x, y)$, $q''(x, y)$ *sono ortogonali*, ossia che *le autofunzioni del nucleo* $p''(x, y)$ *sono ortogonali a quelle del nucleo* $q''(x, y)$.

In virtù di quanto precede si ha che le funzioni della serie (21), le autofunzioni di $p''(x, y)$ e quelle di $q''(x, y)$ insieme prese costituiscono una serie ortogonale Σ.

Riassumendo si ha quindi: *se due funzioni simmetriche* $p(x, y)$, $q(x, y)$ *sono permutabili, esisteranno quattro funzioni simmetriche* $p'(x, y)$, $p''(x, y)$, $q'(x, y)$, $q''(x, y)$ *tali che* $p(x, y) = p'(x, y) + p''(x, y)$, $q(x, y) = q'(x, y) + q''(x, y)$ *e tali ancora che* $p'(x, y)$, $q'(x, y)$ *avranno per autofunzioni tutte e sole le funzioni di una medesima serie ortogonale*, $p'(x, y)$ *sarà ortogonale a* $p''(x, y)$, $q'(x, y)$ *a* $q''(x, y)$, $p'(x, y)$ *a* $q''(x, y)$, $q'(x, y)$ *a* $p''(x, y)$ *e* $p''(x, y)$ *a* $q''(x, y)$; ovvero: *esisterà una serie* Σ *di funzioni ortogonali, la quale conterrà le autofunzioni di* $p(x, y)$ *e quelle di* $q(x, y)$.

La reciproca di questa proposizione è evidente; sicchè *la condizione precedente è necessaria e sufficiente per la permutabilità.*

Si può anche enunciare il seguente teorema: *se tre funzioni simmetriche* $p(x, y)$, $q(x, y)$, $f(x, y)$ *sono legate dalla relazione* (18), *esisterà* *una serie* Σ *di funzioni ortogonali, la quale conterrà le autofunzioni di* $p(x,y)$ *e di* $q(x,y)$; *le autofunzioni di* $f(x,y)$ *saranno tutte e sole le autofunzioni comuni a* $p(x,y)$ *ed a* $q(x,y)$, *e fra i corrispondenti autovalori* f_i, p'_i, q'_i *sussisterà la relazione*: $f_i = p'_i q'_i$.

13. Si può dare il seguente *procedimento per ricercare, date due funzioni simmetriche* $p(x,y)$, $q(x,y)$ *permutabili fra di loro, una serie di funzioni ortogonali* Σ *contenente le autofunzioni di* $p(x,y)$ *e di* $q(x,y)$.

Sia $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ .... la serie delle autofunzioni normalizzate di $p(x,y)$, e $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... la serie delle autofunzioni normalizzate di $q(x,y)$. Si indichi con P″ l'insieme delle funzioni $\varphi_i(x)$ tali che

$$\int_a^b q(x,y)\,\varphi_i(y)\,dy = 0\,,$$

con Q″ l'insieme delle fuuzioni $\psi_i(x)$ tali che

$$\int_a^b p(x,y)\,\psi_i(y)\,dy = 0\,,$$

e con F l'insieme delle autofunzioni normalizzate di

$$f(x,y) = \int_a^b p(x,\xi)\,q(\xi,y)\,d\xi \tag{18}$$

Si avrà:

$$\Sigma = \mathrm{F} + \mathrm{P}'' + \mathrm{Q}''.$$

Per ottenere l'insieme F delle autofunzioni comuni a $p(x,y)$ ed a $q(x,y)$, si può anche operare direttamente sulle $\varphi_i(x)$, ovvero sulle $\psi_i(x)$, senza ricorrere alla funzione $f(x,y)$.

14. Ci si può ancora proporre il quesito di *trovare la più generale funzione simmetrica* $q(x,y)$ *soddisfacente all'equazione* (18), *supposte note le funzioni simmetriehe* $p(x,y)$, $f(x,y)$.

A tal uopo si indichi con P″ l'insieme delle autofunzioni $\varphi_i(x)$ di $p(x,y)$ tali che:

$$\int_a^b f(x,y)\,\varphi_i(y)\,dy = 0\,,$$

con F l'insieme delle autofunzioni normalizzate di $f(x,y)$, e con R l'insieme delle funzioni ortogonali che rende chiuso l'insieme P″ + F, ossia l'insieme complementare a P″ + F. La funzione $q(x,y)$, avente per autofunzioni le funzioni di F ed un insieme qualsiasi di funzioni ortogonali Q″ contenuto in R, e per corrispondenti autovalori un insieme qualsiasi di costanti $q_1, q_2, \ldots$ tali che la serie $\Sigma_i \frac{1}{q_i^2}$ sia convergente ([1]), sarà la funzione cercata.

15. Infine daremo un metodo diverso da quello precedente (§ 2, n. 6) per scrivere la più generale funzione simmetrica $q(x, y)$ permutabile con una data funzione simmetrica $p(x, y)$.

Si scinda l' insieme delle autofunzioni normalizzate di $p(x, y)$ in gruppi

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_{t_1}(x) \; ; \; \varphi_{t_1+1}, \ldots \varphi_{t_1+t_2}(x) \; ; \ldots$$

tali che

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_{t_1} = \pi_1 , p_{t_1+1} = \cdots = p_{t_1+t_2} = \pi_2 , \ldots$$

Si indichino con a_{rs} gli elementi della più generale sostituzione ortogonale di ordine $\tau_1 \leq t_1$; si indichino con $r_1, r_2, \ldots r_{\tau_1}$, τ_1 dei primi t_1 numeri naturali; e si ponga:

$$(30) \quad \begin{cases} \chi_1(x) = a_{11} \, \varphi_{r_1}(x) + a_{12} \, \varphi_{r_2}(x) + \cdots + a_{1\tau_1} \, \varphi_{r_{\tau_1}}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \chi_{\tau_1}(x) = a_{\tau_1 1} \, \varphi_{r_1}(x) + a_{\tau_1 2} \, \varphi_{r_2}(x) + \cdots + a_{\tau_1 \tau_1} \, \varphi_{r_{\tau_1}}(x). \end{cases}$$

Operando nel medesimo modo sulle funzioni $\varphi_i(x)$ del secondo gruppo $\varphi_{t_1+1}(x), \ldots \varphi_{t_1+t_2}(x)$, e così seguitando ad operare sulle funzioni dei gruppi seguenti, si otterrà un insieme Φ di funzioni ortogonali $\chi_1(x), \chi_2(x), \ldots$ Si indichi con P″ l' insieme delle funzioni $\varphi_i(x)$ che via via si sono escluse nelle espressioni (30), e con K l' insieme complementare all' insieme $P'' + \Phi$. La funzione $q(x, y)$, avente per autofunzioni le funzioni dell' insieme Φ e inoltre quelle di un insieme qualsiasi contenuto in K, e per corrispondenti autovalori un insieme qualsiasi di costanti $q_1, q_2, \ldots$ tali che la serie $\Sigma_i \frac{1}{q_i^2}$ sia convergente, sarà la funzione cercata.

Catania, Dicembre 1912.

([1]) Lauricella, *Sopra i nuclei reiterati*, loc. cit.