ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Meccanica. — *Sul pendolo a sospensione elastica.* Nota del Corrisp. O. TEDONE.

1. Supponiamo che ad un filo elastico omogeneo di lunghezza l_0, nello stato naturale, sospeso ad uno degli estremi, sia attaccato all'altro estremo un corpo di massa m e di peso, quindi, $P = mg$. Questo sistema che costituisce il nostro pendolo, assume la sua configurazione d'equilibrio stabile secondo la verticale ed, in questa configurazione, indicheremo con T la tensione nei varii punti del filo. Supponiamo che al filo di sospensione sia applicabile la legge di Hooke, di rimanere, col peso P, nei limiti di validità di questa legge e di poter trascurare il peso del filo stesso. Scegliendo allora l'origine delle coordinate nel punto di sospensione e l'asse x verticale e diretto verso il basso, nella posizione d'equilibrio il pendolo sarà disposto secondo l'asse x positivo, T sarà costante ed eguale a P e, chiamando k^2 il modulo di elasticità del filo di sospensione, la lunghezza del pendolo nella configurazione d'equilibrio sarà

$$l = l_0 \left(1 + \frac{P}{k}\right).$$

Il problema di cui vogliamo occuparci è quello della determinazione delle piccole oscillazioni del nostro pendolo intorno alla sua configurazione d'equilibrio. Ricordiamo perciò che, chiamando u, v, w le componenti dello spostamento di un punto del filo di sospensione, a partire dalla sua posizione d'equilibrio, secondo gli assi x, y, z, le funzioni u, v, w di x e t devono soddisfare alle equazioni:

$$(1) \qquad \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = P \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad , \quad \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

μ essendo la densità del filo elastico. Inoltre, per $x = 0$, u, v, w devono annullarsi, mentre, per $x = l$, devono soddisfare alle condizioni che si ottengono annullando la risultante della forza d'inerzia del corpo m, del suo peso P e della tensione del filo. Scrivendo queste condizioni e trascurando termini di ordine superiore, si ottengono le condizioni precedenti sotto la forma:

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k^2}{m} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + g \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + g \frac{\partial w}{\partial t} = 0 .$$

La determinazione di u, v, w si scinde in tre problemi distinti che, dal punto di vista analitico, ne formano uno solo. Ciascuna delle funzioni u, v, w

è determinata completamente dalle condizioni precedenti e dalle condizioni iniziali.

Il problema precedente compare spesso nei libri di elasticità con una interpretazione diversa: vogliamo dire come il problema delle oscillazioni longitudinali di una verga elastica che abbia un estremo fisso, mentre all'altro estremo subisce una percussione. In questa Nota diamo la soluzione completa di esso con formole notevolmente semplici anche pel caso più generale che noi pure consideriamo, in cui il punto di sospensione del pendolo, invece di essere fisso, è assoggettato ad un movimento prestabilito.

2. Prima di passare a risolvere il nostro problema osserviamo che k^2 è sempre un numero grandissimo. Supponiamo che $\frac{k^2}{\mu}$ possa praticamente considerarsi come infinitamente grande. Allora, le accelerazioni dovendo rimanere finite, dev'essere:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad u = \bar{u}\, x$$

con $\bar{u}$ funzione soltanto di t che, per le (2), deve soddisfare all'equazione

$$\frac{d^2\bar{u}}{dt^2} + \frac{k^2}{ml}\bar{u} = 0.$$

Quindi il sistema è capace di una sola oscillazione armonica longitudinale di periodo $\frac{2\pi}{k}\sqrt{ml}$. Ciò, soltanto nel caso in cui m sia paragonabile con k^2; chè se k^2 si può ritenere infinitamente grande anche rispetto ad m, è $\bar{u} = 0$ e il filo elastico si può ritenere praticamente come inestendibile. Sussistono allora soltanto vibrazioni trasversali e queste, se $\frac{P}{\mu}$ è grandissimo e ci limitiamo a considerare soltanto quelle parallele all'asse y, avvengono secondo la legge $v = \bar{v}x$, con $\bar{v}$ funzione di t soddisfacente alla condizione

$$\frac{d^2\bar{v}}{dt^2} + \frac{g}{l}\bar{v} = 0.$$

Il nostro pendolo elastico oscilla, in questo caso, come un pendolo semplice ordinario.

3. Ritorniamo ora al caso generale ed occupiamoci del problema delle vibrazioni longitudinali. Ponendo

$$y = \sqrt{\frac{k^2}{\mu}}\, t,$$

dal punto di vista analitico, esso consiste nel determinare la funzione u di x e di t la quale, supposto di aver scelto l'istante $t = 0$ come istante

iniziale, nella porzione della striscia del piano xy limitata dalle rette $x=0$ ed $x=l$ in cui $y \geq 0$, sia finita e continua, insieme alle derivate prime, e soddisfi all'equazione

$$1^a \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,;$$

che, inoltre, sia:

$$2^a \qquad \text{per } x=0 \quad , \quad u=0\,,$$

$$3^a \qquad \text{per } x=l \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad a^2 = \frac{\mu}{m}\,,$$

$$4^a \qquad \text{per } y=0 \quad , \quad 0 \leq x \leq l \quad , \quad u = f(l-x) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{F}(l-x),$$

con $f(l-x)$, $\mathrm{F}(l-x)$ funzioni arbitrarie dell'argomento $l-x$.

Cambiando nella soluzione ottenuta per questo problema, u in v, od in w, e ponendo $\sqrt{\frac{\mathrm{P}}{\mu}}\, t$ al posto di y si ottengono le formole corrispondenti alle vibrazioni trasversali.

Chiameremo il problema precedente problema delle *vibrazioni libere* del pendolo elastico ed, insieme ad esso, considereremo l'altro in cui il punto di sospensione, invece di essere fisso, ha un movimento prestabilito e che chiameremo, invece, problema delle *vibrazioni forzate*. In quest'ultimo caso la condizione 2^a è sostituita dall'altra

$$2^a\,bis \qquad \text{per } x=0\,, \quad \text{sia} \quad u = \Phi(y)\,,$$

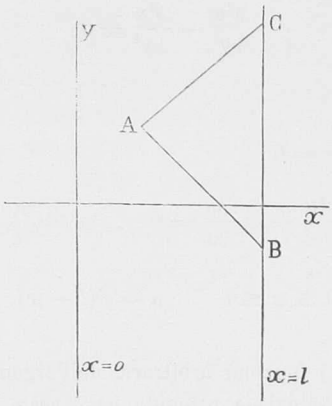
dove $\Phi(y)$ è una funzione data per ogni valore di $y \geq 0$.

Risolviamo dapprima il problema senza por mente alle condizioni iniziali, in modo che la soluzione valga per ogni valore del tempo fra $-\infty$ e $+\infty$.

Questa soluzione s'imposta nel modo migliore prendendo come punto di partenza la formola di Riemann per l'equazione 1^a ottenuta col metodo delle caratteristiche. Se indichiamo con x, y le coordinate di un punto fisso qualunque della striscia compresa fra le rette $x=0$, $x=l$ e con ξ, η le coordinate correnti di un altro punto della stessa striscia e chiamiamo $\varphi(\eta)$ i valori che assume u sulla retta $x=l$, supposto che $\varphi(\eta)$ sia nota per ogni valore di η, la detta formola di Riemann ci dà subito

$$2\,u(x\,,y) = \varphi(y+x-l) + \varphi(y-x+l) + \int_{y-x+l}^{y+x-l} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l} dy\,,$$

l'integrale essendo esteso al segmento $\overline{BC}$ della retta $x = l$ compreso fra le due caratteristiche dell'equazione 1ª uscenti dal punto $A \equiv (x, y)$ (vedi figura seg.).



Notando quindi che, per la condizione 3ª, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l} = -\frac{1}{a^2}\varphi''(\eta)$, la formola precedente diventa

$$(3) \qquad 2u(x, y) = \varphi(y + x - l) + \varphi(y - x + l) - \\ - \frac{1}{a^2}[\varphi'(y + x - l) - \varphi'(y - x + l)].$$

Questa formola mostra intanto che, nota $\varphi(\eta)$, ossia il movimento dell'estremo libero del filo elastico, per ogni valore del tempo, è contemporaneamente noto, per ogni valore del tempo, il movimento di ogni altro punto del filo elastico.

Però la funzione $\varphi(\eta)$ non può scegliersi ad arbitrio. Scegliendo la soluzione del nostro problema sotto la forma (3), la condizione 3ª è identicamente soddisfatta, ma affinchè sia soddisfatta la condizione 2ª dev'essere

$$\text{I)} \qquad a^2[\varphi(y - l) + \varphi(y + l)] - \varphi'(y - l) + \varphi'(y + l) = 0$$

per ogni valore di y, nel caso delle vibrazioni libere, mentre, nel caso delle vibrazioni forzate, dev'essere

$$\text{I')} \qquad a^2[\varphi(y - l) + \varphi(y + l)] - \varphi'(y - l) + \varphi'(y + l) = 2a^2\Phi(y).$$

4. Nota $\varphi(\eta)$ e rappresentate, come prima, con $u_0 = f(l - x)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = F(l - x)$ le condizioni iniziali del movimento del nostro sistema,

le funzioni f e F saranno determinate dalle formole:

$$(4)\qquad \begin{cases} 2f(x) = \varphi(x) + \varphi(-x) + \dfrac{1}{a^2}[\varphi'(x) - \varphi'(-x)]\,, \\ 2\mathrm{F}(x) = \varphi'(x) + \varphi'(-x) + \dfrac{1}{a^2}[\varphi''(x) - \varphi''(-x)]\,. \end{cases}$$

Il problema più importante è però l'inverso del precedente, quello cioè in cui sono date le condizioni iniziali e ci si propone, con l'aiuto, naturalmente, della I), ovvero della I'), di determinare la funzione φ. Integriamo perciò la seconda delle (4), aggiungiamola, quindi, una volta, alla prima, ed un'altra volta sottragghiamola. Troviamo così le due equazioni:

$$\text{II)}\qquad \begin{cases} \varphi'(x) + a^2\varphi(x) = a^2\left[\displaystyle\int_0^x \mathrm{F}(x)\,dx + f(x)\right] + \mathrm{F}(0), \\ \varphi'(-x) - a^2\varphi(-x) = a^2\left[\displaystyle\int_0^x \mathrm{F}(x)\,dx - f(x)\right] + \mathrm{F}(0). \end{cases}$$

Queste equazioni determinano $\varphi(x)$ nell'intervallo $-l \leq x \leq l$, mentre la I) permette allora di determinare la stessa funzione in ogni altro intervallo successivo o precedente di ampiezza $2l$, se siamo nel caso delle vibrazioni libere. Nel caso delle vibrazioni forzate è la I') che permette di raggiungere lo stesso scopo

5. Prima di passare a dare le formole di risoluzione generali del nostro problema, fermiamoci un momento a considerare le oscillazioni armoniche di cui è capace il nostro sistema. Per ognuna di tali oscillazioni si deve poter soddisfare a tutte le condizioni del problema dando alla funzione φ la forma

$$(5)\qquad \varphi(y) = e^{ky\sqrt{-1}}\,.$$

Nel caso quindi delle vibrazioni libere, a causa della I), k dev'essere radice dell'equazione (equazione nella frequenza)

$$(6)\qquad \operatorname{cotg}(kl) = \frac{k}{a^2}\,;$$

nel caso, invece, delle vibrazioni forzate, nel qual caso vale la I'), si richiede che k non soddisfi alla (6) e che $\Phi(y)$ sia proporzionale a $\varphi(y)$. Viceversa se k_i è radice della (6), nel caso delle vibrazioni libere, se non soddisfa a questa equazione, nel caso delle vibrazioni forzate, e $\Phi(y)$ è la parte reale o il coefficiente dell'immaginario di $e^{ky\sqrt{-1}}$, determinando opportunamente le condizioni iniziali, il nostro sistema compirà delle oscillazioni armoniche. Supponendo, in particolare,

$$\varphi(y) = \cos ky,$$

la corrispondente soluzione del nostro problema sarà

$$u = \left[\cos k(l-x) - \frac{k}{a^2} \operatorname{sen} k(l-x) \right] \cos ky$$

che, per $x = 0$, si annulla o resta proporzionale a $\cos ky$ a seconda che k soddisfa, o no, alla (6), e corrisponderà alle condizioni iniziali:

$$f(x) = \cos(kx) - \frac{k}{a^2} \operatorname{sen}(kx) \quad , \quad \mathrm{F}(x) = 0 \quad (^1).$$

6. Passiamo ora a dare la soluzione generale del nostro problema, limitandoci alla determinazione di $\varphi(y)$, per $y \geq 0$ e mettendoci nel caso delle vibrazioni forzate di cui il problema delle vibrazioni libere è un caso particolare. Poniamo perciò:

$$(7) \quad \begin{cases} \varphi_m(y) = \varphi(y + 2ml) \ , \ \varphi_0(y) = \varphi(y) \ ; \\ \Phi_m(y) = \Phi(y + 2ml) \ , \ \Phi_0(y) = \Phi(y) \\ \mathfrak{D}\,\varphi_m(y) = \dfrac{d\varphi_m}{dy} + a^2\varphi_m \quad , \quad \mathrm{D}\,\varphi_m(y) = \dfrac{d\varphi_m}{dy} - a^2\varphi_m \end{cases}$$

e supponiamo che in $\varphi_m(y)$, $\Phi_m(y)$, l'argomento varii soltanto fra 0 e $2l$. Con queste posizioni, abbiamo subito dalla I'), per qualunque valore di m

$$(8) \qquad \mathfrak{D}\,\varphi_m(y) = \mathrm{D}\,\varphi_{m-1}(y) + 2\,a^2\Phi_m(y-l).$$

Cambiando, nella relazione precedente, m in i, eseguendo poi sui due membri l'operazione $\mathfrak{D}^{i-1}\,\mathrm{D}^{m-i}$ e sommando, rispetto ad i, da 1 ad m, si trova

$$(8') \qquad \mathfrak{D}^m\varphi_m(y) = \mathrm{D}^m\varphi_0(y) + 2a^2 \sum_1^m{}_i\, \mathfrak{D}^{i-1}\,\mathrm{D}^{m-i}\,\Phi_i(y-l).$$

(1) Nel caso particolare considerato le II) si riducono ad una sola equazione. Se chiamiamo k_i, con $i = 1, 2, \ldots$, le infinite radici dell'equazione (6), questa equazione trasforma le infinite funzioni non ortogonali $\cos k_i y$ nelle infinite funzioni ortogonali, relative all'intervallo $0 - l$, $\cos k_i x - \frac{k_i}{a^2} \operatorname{sen} k_i x$ e trasforma, più in generale una somma o serie convergente $\Sigma \mathrm{A}_i \cos k_i y$ nella somma o serie convergente

$$\Sigma \mathrm{A}_i \left[\cos k_i x - \frac{k_i}{a^2} \operatorname{sen} k_i x \right].$$

Queste osservazioni suggeriscono le considerazioni seguenti. Una serie convergente come $\Sigma \mathrm{A}_i \cos k_i y$ può rappresentare una funzione arbitraria, soltanto però in un intervallo di ampiezza l, se le k_i sono le infinite radici dell'equazione $\operatorname{sen}(k_i l) = 0$, od anche se esse sono le infinite radici della (6). Nasce quindi la quistione, di importanza teorica e pratica evidente e, per la soluzione della quale, non mi è riuscito di rintracciare una via generale soddisfacente: Supposto che le k_i sieno le infinite radici di una data equazione trascendente, qual'è il più grande intervallo in cui la serie precedente può rappresentare una funzione arbitraria e, data questa funzione, come si determinano i coefficienti A_i?

Dalla I) stessa abbiamo ancora

$$\mathfrak{D}\varphi_0(y+l) = \mathrm{D}\varphi_0(y-l) + 2\,a^2\,\Phi(y)$$

e quindi, supponendo $0 \leq y \leq l$ e tenendo conto della seconda delle II),

$$\mathfrak{D}\varphi_0(y+l) = a^2\left[\int_0^{l-y} \mathrm{F}(\eta)\,d\eta - f(l-y)\right] + \mathrm{F}(o) + 2\,a^2\,\Phi(y)\,.$$

Se dunque introduciamo una funzione $\mathrm{U}(y)$, definita nell'intervallo $0 - 2l$, dalle condizioni:

$$\mathrm{U}(y) = a^2\left[\int_0^{y} \mathrm{F}(\eta)\,d\eta + f(y)\right] + \mathrm{F}(o)\,, \tag{9}$$

per $0 \leq y \leq l$, e

$$\mathrm{U}(y) = a^2\left[\int_0^{2l-y} \mathrm{F}(\eta)\,d\eta - f(2l-y)\right] + \mathrm{F}(o) + 2\,a^2\,\Phi(y-l)\,, \tag{9'}$$

per $l \leq y \leq 2l$, si potrà scrivere

$$\mathfrak{D}\varphi_0(y) = \mathrm{U}(y)\,. \tag{8''}$$

La funzione $\mathrm{U}(y)$ è una funzione nota e continua per $y = l$ a causa della condizione

$$f(l) = \Phi(o)\,.$$

Le (8′) e (8″) ci permettono di scrivere

$$\mathfrak{D}^{m+1}\varphi_m(y) = \mathrm{D}^m\,\mathrm{U}(y) + 2\,a^2 \sum_1^m{}_i\, \mathfrak{D}^i\,\mathrm{D}^{m-i}\,\Phi_i(y-l) \tag{11}$$

e questa equazione dà, per $\varphi_m(y)$,

$$\varphi_m(y) = e^{-a^2 y}\left\{\mathrm{Y}_m + \frac{1}{m!}\int_0^y (y-\eta)^m\, e^{a^2\eta}\left[\mathrm{D}^m\mathrm{U}(\eta) + \right.\right. \tag{12}$$

$$\left.\left. + 2\,a^2 \sum_1^m{}_i\, \mathfrak{D}^i\,\mathrm{D}^{m-i}\,\Phi_i(\eta-l)\right] d\eta\right\},$$

dove Y_m rappresenta un polinomio di grado m in y che dev'essere determinato in modo che le φ_m soddisfino alla (8) e, per $y = 0$, si riduca a $\varphi_{m-1}(2l)$. Sostituendo effettivamente le espressioni (12) delle $\varphi_m(y)$, nella (8) si trova subito che dev'essere

$$\mathrm{Y}'_m = \mathrm{Y}'_{m-1} - 2\,a^2\,\mathrm{Y}_{m-1} +$$

$$+ \frac{y^{m-1}}{(m-1)!}\left[\mathrm{D}^{m-1}\mathrm{U}(\eta) + 2\,a^2 \sum_1^{m-1}{}_i\, \mathfrak{D}^i\,\mathrm{D}^{m-i-1}\,\Phi_i(\eta-l)\right]_{\eta=0}$$

$$- \frac{2\,a^2}{(m-1)!}\int_0^y (y-\eta)^{m-1}\, e^{a^2\eta}\,\mathfrak{D}^m\Phi_m(\eta-l)\,d\eta + 2\,a^2\,e^{a^2 y}\,\Phi_m(y-l)$$

e, con delle integrazioni per parti, l'equazione precedente si riduce anche a

$$(13)\qquad Y'_m = Y'_{m-1} - 2a^2\, Y_{m-1} + 2a^2 \sum_{0}^{m-1}{}_i \frac{y^i}{i!} \left| \mathfrak{D}^i \Phi_{m-1}(\eta) \right|_{\eta=l} +$$

$$+ \frac{y^{m-1}}{(m-1)!} \left[D^{m-1} U(y) + 2a^2 \sum_{1}^{m-1}{}_i \mathfrak{D}^i\, D^{m-i-1} \Phi_i(\eta - l) \right]_{\eta=0} .$$

Questa formola permette di calcolare successivamente le Y_m ricordando che Y_m, per $y = 0$, si riduce a $\varphi_{m-1}(2l)$ e notando che $Y_0 = f(o)$.

7. Supponiamo, come caso particolare, che sia $\Phi(y) = 0$ e che quindi il punto di sospensione del pendolo sia fisso, mentre il suo movimento è determinato da una piccola velocità V comunicata alla massa m. La funzione $U(y)$ si riduce, in questo caso, a

$$U(y) = F(o) = V$$

e la formola (12) diventa, mutando il significato di Y_m,

$$\varphi_m(y) = e^{-a^2 y}\, Y_m + (-1)^m \frac{V}{a^2}$$

con

$$Y'_m = Y'_{m-1} - 2a^2\, Y_{m-1} ,$$

$$Y_m(o) = \varphi_{m-1}(2l) + (-1)^{m-1} \frac{V}{a^2} \quad , \quad Y_0 = \frac{-V}{a^2} .$$

Per Y_m si trova facilmente l'espressione generale

$$Y_m = Y_m(o) + \sum_{1}^{m-1}{}_i Y_i(o) \sum_{1}^{m-i+1}{}_j (-1)^j \binom{m-i}{j-1} (2a^2)^j \frac{y^j}{j!} .$$

Formole solo poco più complicate si ottengono se, oltre a $\Phi(y) = 0$, è $F(x) = 0$ ed il movimento del pendolo è determinato da un piccolo spostamento del sistema dalla posizione di equilibrio, in modo che sia $f(x) = \alpha x$.

8. Consideriamo infine il caso in cui il punto di sospensione del pendolo, essendo, p. es., collegato con un braccio di un diapason che emette un tono determinato, esegua delle oscillazioni di ampiezza e frequenza note. Otteniamo questo caso supponendo che $\Phi(y)$ sia proporzionale alla parte reale od al coefficiente dell'immaginario di $e^{\sqrt{-1}\,k(y-\alpha)}$, k ed α essendo due costanti. Supponiamo, per comprendere i due casi contemporaneamente e per maggiore semplicità, che sia

$$\Phi(y) = e^{\sqrt{-1}\,ky} .$$

Avremo allora

$$\sum_{1}^{m}{}_i \mathfrak{D}^{i-1} D^{m-i} \Phi_i(y-l) =$$

$$= \frac{[(\sqrt{-1}+a^2)\, e^{2\sqrt{-1}\,kl}]^m - (\sqrt{-1}\,k - a^2)^m}{(\sqrt{-1}\,k + a^2)\, e^{2\sqrt{-1}\,kl} - (\sqrt{-1}\,k - a^2)}\, e^{\sqrt{-1}\,k(y+l)},$$

a meno che k non soddisfi alla (6) e non annulli quindi il denominatore del secondo membro, nel quale caso questo secondo membro acquista forma indeterminata e va sostituito con l'espressione

$$m(\sqrt{-1}\,k + a^2)^m\, e^{\sqrt{-1}\,k(y+2ml-l)}.$$

Comunque sieno assegnate le condizioni iniziali del nostro problema, possiamo sempre supporre questo spezzato in due parti in modo che nella prima parte le condizioni iniziali sieno le date ed il punto di sospensione sia fisso, mentre nella seconda parte sieno nulli gli spostamenti e le velocità iniziali ed il punto di sospensione esegua il movimento assegnato. Ci è lecito dunque supporre, nella nostra quistione, $f(x) = F(x) = 0$ e volendo soddisfare anche alla condizione $\Phi(o) = f(l)$ bisognerà scegliere per soluzione di essa quella che si ottiene prendendo, nelle formole che andiamo a costruire, sempre il coefficiente dell' immaginario.

Nella ipotesi fatta sarà:

$$U(y) = 0\,, \quad \text{per} \quad 0 \leq y \leq l.$$

$$U(y) = 2\,a^2\, e^{\sqrt{-1}\,(k-l)}, \quad \text{per} \quad l \leq y \leq 2l.$$

Cambiando il significato del polinomio Y_m ed indicando con A_m una costante che ha però valori diversi a seconda che è $0 \leq y \leq l$, ovvero $l \leq y \leq 2l$, potremo scrivere

$$\varphi_m(y) = e^{-a^2 y}\, Y_m + A_m\, e^{\sqrt{-1}\,ky}.$$

Nel caso, p. es., in cui $0 \leq y \leq l$ e k soddisfa alla (6) è

$$A_m = 2\,m\,a^2\, e^{\sqrt{-1}\,k(2m-1)l}.$$

Il polinomio Y_m, dovendo soddisfare alla (8), dev'essere ora scelto in modo che sia

$$Y'_m = Y'_{m-1} - 2\,a^2\, Y_m \quad , \quad Y_0 = 0 \quad , \quad Y_m(o) = \varphi_{m-1}(2l) - A_m$$

e quindi

$$Y_m = Y_m(o) + \sum_{1}^{m-1}{}_i\, Y_i(o) \sum_{1}^{m-i+1}{}_j (-1)^j \binom{m-i}{j-1} (2\,a^2)^j\, \frac{y^j}{j!}.$$

Com' era da aspettarsi $\varphi_m(y)$ col crescere di m cresce indefinitamente se k soddisfa alla (6).