ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Meccanica celeste. — *Prime conseguenze di una recente teoria della gravitazione: le disuguaglianze secolari.* Nota di G. Pavanini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. In una recente Nota [1], che ebbi l'onore di presentare all'Accademia, mi proposi di studiare il problema dei due corpi nel campo gravitazionale Einstein-Abraham. Ottenni delle equazioni approssimate fino al secondo ordine rispetto al rapporto fra la velocità dei corpi e quella di propagazione della luce, esenti da complicazioni funzionali, e tali da mettere in evidenza quanto c'è di diverso dal caso limite ordinario di una propagazione istantanea.

Nella Nota presente mi propongo di dedurre le principali conseguenze cui si perviene nello studio del problema indicato. A tale scopo, partendo dalle equazioni accennate, ricavo quelle che reggono il moto relativo, e, per renderne espressive le conseguenze salienti, interpreto i termini addizionali che vi si presentano come componenti di una forza perturbatrice della quale determino gli effetti col metodo classico della variazione delle costanti arbitrarie.

Le disuguaglianze secolari che in tal guisa ottengo dipendono non soltanto dal moto relativo dei due corpi, ma anche, in modo essenziale, dal loro movimento assoluto: circostanza questa manifestamente assai poco soddisfacente, per una teoria che, almeno inizialmente, era stata concepita per estendere alla gravitazione il principio di relatività. In base a tale teoria, l'assoluto, cacciato dallo schema elettromagnetico, riapparirebbe proprio là dove, colla meccanica classica, era scomparso da secoli.

Del resto, se non questi, altri inconvenienti della teoria suaccennata devono essere apparsi agli stessi Autori, poichè essi tendono a modificarne la struttura [2] (mantenendo certe relazioni fisiche che il principio di relatività ha fatto intravedere, ma rinunciando alla primitiva accezione del principio stesso).

2. *Equazioni del moto relativo.* — Nella Nota citata prendemmo in esame il moto di due corpi, designati, come le loro masse, con m ed m_0 e di coordinate (riferite ad un sistema di assi fissi) $\xi, \eta, \zeta; \xi_0, \eta_0, \zeta_0$.

[1] *Prime conseguenze d'una recente teoria della gravitazione.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXI, 2° sem. 1912.

[2] Cfr. per es. Abraham, *Una nuova teoria della gravitazione,* Nuovo Cimento, ser. VI, fasc. 12, 1912.

In base alla teoria della gravitazione proposta dal sig. Abraham, e suggerita dal principio di relatività, abbiamo ottenuto per i due corpi rispettivamente le equazioni:

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
\xi'' &= -fm_0 \frac{\xi-\xi_0}{r^3} + \frac{1}{c_0^2}\frac{fm_0}{r^2}\times \\
&\quad \times\left\{\frac{\xi-\xi_0}{r}\left(-\frac{2fm_0}{r}+v^2-\frac{v_0^2}{2}+\frac{3}{2}v_{0r}^2\right)+\xi' v_r+(\xi'-\xi_0')\,v_{0r}\right\},\\
\eta'' &= -fm_0 \frac{\eta-\eta_0}{r^3} + \frac{1}{c_0^2}\frac{fm_0}{r^2}\times \\
&\quad \times\left\{\frac{\eta-\eta_0}{r}\left(-\frac{2fm_0}{r}+v^2-\frac{v_0^2}{2}+\frac{3}{2}v_{0r}^2\right)+\eta' v_r+(\eta'-\eta_0')\,v_{0r}\right\},\\
\zeta'' &= -fm_0 \frac{\zeta-\zeta_0}{r^3} + \frac{1}{c_0^2}\frac{fm_0}{r^2}\times \\
&\quad \times\left\{\frac{\zeta-\zeta_0}{r}\left(-\frac{2fm_0}{r}+v^2-\frac{v_0^2}{2}+\frac{3}{2}v_{0r}^2\right)+\zeta' v_r+(\zeta'-\zeta_0')\,v_{0r}\right\};
\end{aligned}
\right.
$$

e

$$
(1')\quad \left\{
\begin{aligned}
\xi_0'' &= fm \frac{\xi-\xi_0}{r^3} - \frac{1}{c_0^2}\frac{fm}{r^2}\times \\
&\quad \times\left\{\frac{\xi-\xi_0}{r}\left(-\frac{2fm}{r}+v_0^2-\frac{v^2}{2}+\frac{3}{2}v_r^2\right)+\xi_0' v_{0r}-(\xi'-\xi_0')\,v_r\right\},\\
\eta_0'' &= fm \frac{\eta-\eta_0}{r^3} - \frac{1}{c_0^2}\frac{fm}{r^2}\times \\
&\quad \times\left\{\frac{\eta-\eta_0}{r}\left(-\frac{2fm}{r}+v_0^2-\frac{v^2}{2}+\frac{3}{2}v_r^2\right)+\eta_0' v_{0r}-(\eta'-\eta_0')\,v_r\right\},\\
\zeta_0'' &= fm \frac{\zeta-\zeta_0}{r^3} - \frac{1}{c_0^2}\frac{fm}{r^2}\times \\
&\quad \times\left\{\frac{\zeta-\zeta_0}{r}\left(-\frac{2fm}{r}+v_0^2-\frac{v^2}{2}+\frac{3}{2}v_r^2\right)+\zeta_0' v_{0r}-(\zeta'-\zeta_0')\,v_r\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

In esse è

$$r^2=(\xi-\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2+(\zeta-\zeta_0)^2,$$

c_0 valore corrente della velocità della luce, e $v\,,v_r\,;\,v_0\,,v_{0r}$ rappresentano le velocità dei due corpi m ed m_0 e le loro componenti secondo la retta (e nel verso) $m_0 m$.

Poniamo ora

$$\xi-\xi_0=x\quad,\quad \eta-\eta_0=y\quad,\quad \zeta-\zeta_0=z;$$

cosicchè x, y, z sono le coordinate di m riferite ad un sistema di assi paralleli agli assi fissi ed aventi l'origine in m_0. Ne segue

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 .$$

Indichiamo con V la velocità relativa di m rispetto ad m_0, e con V_r la sua componente secondo la congiungente i due corpi.

Poniamo ancora

$$(2)\quad \begin{cases} P = \dfrac{1}{2c_0^2 r^3} \left\{ -\dfrac{4}{r} f^2(m_0^2 + m^2) + f(2m_0 - m)(V^2 + 2V \times v_0) + \right. \\ \qquad\qquad \left. + k^2(v_0^2 + 3v_{0r}^2) + 3fmV_r(V_r + 2v_{0r}) \right\}, \\ Q = \dfrac{f}{c_0^2 r^2} \{(m_0 - m) V_r + (2m_0 - m) v_{0r}\} , \\ R = \dfrac{1}{c_0^2 r^2} (fm_0 V_r + k^2 v_{0r}) , \end{cases}$$

(nelle quali è $k^2 = f(m_0 + m)$); e

$$(3)\quad \begin{cases} L = Px + Qx' + R\xi_0' , \\ M = Py + Qy' + R\eta_0' , \\ N = Pz + Qz' + R\zeta_0' . \end{cases}$$

Le equazioni del moto di m rispetto ad m_0 si ottengono sottraendo le (1') dalle (1); esse sono adunque

$$(4)\qquad x'' + \frac{k^2}{r^3} x = L \quad , \quad y'' + \frac{k^2}{r^3} y = M \quad , \quad z'' + \frac{k^2}{r^3} z = N .$$

Confrontando le (4) con le equazioni ben note del moto ellittico si deduce che L, M, N possono essere considerate quali componenti della forza perturbatrice conseguenza della legge di attrazione risultante dalle vedute del sig. Abraham. Queste componenti, oltre che dagli elementi del moto relativo, dipendono anche da quelli del moto assoluto.

3. *Componenti* S, T, W *della forza perturbatrice.* — Allo scopo di determinare gli effetti di tale forza perturbatrice, ci serviremo delle equazioni che dànno le variazioni delle costanti arbitrarie. Per l'uso di tali equazioni necessita conoscere le componenti della forza stessa secondo la direzione del raggio vettore (S), della normale a questo raggio contenuta nel piano dell'orbita osculatrice (T), e della normale a questo piano (W).

Indicheremo i coseni degli angoli che queste direzioni formano con gli assi x, y, z a norma dello specchietto

	x	y	z
S	α	β	γ
T	α'	β'	γ'
W	α''	β''	γ''

Essendo L, M, N le componenti della forza perturbatrice secondo gli assi x, y, z, risulta:

$$\begin{aligned} S &= L\alpha + M\beta + N\gamma , \\ T &= L\alpha' + M\beta' + N\gamma' , \\ W &= L\alpha'' + M\beta'' + N\gamma'' . \end{aligned}$$

Per esprimere in forma definitiva S, T, W ricordiamo che, rappresentando, come al solito, con e, p, e w l'*eccentricità*, il *parametro dell'orbita*, e l'*anomalia vera*, si ha

$$r = \frac{p}{1 + e \cos w} \quad , \quad \frac{dw}{dt} = \frac{k\sqrt{p}}{r^2} . \tag{5}$$

Di più se con A, B, C; $-A_1$, $-B_1$, $-C_1$ indichiamo i valori di α, β, γ rispettivamente per $w = 0$ e $w = \frac{\pi}{2}$, allora

$$\alpha = \frac{x}{r} = A \cos w - A_1 \operatorname{sen} w ,$$

$$\beta = \frac{y}{r} = B \cos w - B_1 \operatorname{sen} w ,$$

$$\gamma = \frac{z}{r} = C \cos w - C_1 \operatorname{sen} w :$$

inoltre

$$\alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial w} \quad , \quad \beta' = \frac{\partial \beta}{\partial w} \quad , \quad \gamma' = \frac{\partial \gamma}{\partial w} .$$

(È noto poi che $\alpha'', \beta'', \gamma''$ non dipendono dall'anomalia vera).

In base a queste formole ed alle (3) otteniamo

$$\left\{ \begin{aligned} S &= Pr + QV_r + Rv_{0r} , \\ T &= Q\frac{k\sqrt{p}}{r} - R(\lambda \operatorname{sen} w - \mu \cos w) , \\ W &= R\nu , \end{aligned} \right. \tag{6}$$

nelle quali λ, μ, ν sono le componenti di v_0 secondo gli assi del nuovo sistema quando questo occupa la posizione perielia.

Se teniamo presente ancora che

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathrm{V} = \dfrac{k^2}{p}(1 + e^2 + 2e\cos w), \\[2ex] \mathrm{V}_r = \dfrac{ke}{\sqrt{p}} \operatorname{sen} w, \\[2ex] v_{0r} = \lambda \cos w + \mu \operatorname{sen} w, \end{cases}$$

potremo senz'altro considerare le quantità S, T, W come funzioni esplicite dell'anomalia vera.

4. *Disuguaglianze secolari.* — Per la determinazione di queste disuguaglianze partiremo dalle note equazioni che dànno le variazioni delle costanti arbitrarie, equazioni che per maggiore chiarezza trascriviamo ([1]):

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^3}{k\sqrt{p}}\left(e \operatorname{sen} w\,\mathrm{S} + \frac{p}{r}\mathrm{T}\right),$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{p}}{k}\left\{\operatorname{sen} w\,\mathrm{S} + (\cos u + \cos w)\,\mathrm{T}\right\},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{r}{k\sqrt{p}}\cos\eta\,\mathrm{W},$$

$$\operatorname{sen}\varphi\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{r}{k\sqrt{p}}\operatorname{sen}\eta\,\mathrm{W},$$

$$e\,\frac{d\varpi}{dt} = 2e\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\sqrt{p}}{k}\left\{-\cos w\,\mathrm{S} + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\operatorname{sen} w\,\mathrm{T}\right\},$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2r}{k\sqrt{p}}\mathrm{S} + \left(1 - \sqrt{1-e^2}\right)\frac{d\varpi}{dt} + 2\sqrt{1-e^2}\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}\frac{d\theta}{dt}.$$

In queste equazioni è noto che $a, \varphi, \theta, \varpi, \varepsilon, \eta, u$ rappresentano rispettivamente il *semi-grand'asse*, l'*inclinazione*, la *longitudine del nodo*, la *longitudine del perielio*, la *longitudine media all'epoca* 0, *l'argomento della latitudine*, e l'*anomalia eccentrica*. Sappiamo ancora che

$$\eta = g + w \quad \text{e} \quad \cos u = \frac{\cos w + e}{1 + e\cos w}.$$

Per fare un assaggio delle conseguenze alle quali siamo condotti dalla teoria di cui ci occupiamo potremo supporre λ, μ, ν come delle quantità

([1]) Cfr. ad es. Tisserand, *Mécanique céleste*, tom. I, pag. 433.

costanti [1]. Allora sostituendo nelle equazioni soprascritte i valori di S, T, W dati dalle (6), ed assumendo w come variabile di integrazione (avendo presente a tale scopo le (5) e le (7)), con facile calcolo, integrando e tenendo conto dei soli termini secolari, otteniamo le disuguaglianze:

$$
(8)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\delta a &= -\frac{a^3 e f m_0}{c_0^2 k\sqrt{p^3}}\,\lambda w\,,\\
\delta e &= \frac{\lambda}{c_0^2 e^2}\left\{2(1-e^2)\,\mu - \frac{3e^2-2}{2k\sqrt{p}}\,e f m_0\right\} w\,,\\
\delta\varphi &= -\frac{\nu}{c_0^2 e^2}\left\{\cos g\lambda + \operatorname{sen} g\left(\mu + \frac{e f m_0}{k\sqrt{p}}\right)\right\} w\,,\\
\operatorname{sen}\varphi\,\delta\theta &= -\frac{\nu}{c_0^2 e^2}\left\{\operatorname{sen} g\lambda - \cos g\left(\mu + \frac{e f m_0}{k\sqrt{p}}\right)\right\} w\,,\\
\delta\varpi &= \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\,\delta\theta + \frac{1}{2c_0^2 e^4}\left\{\frac{4e^4}{k^2 p} f^2(m_0^2+m^2) - \frac{2e^4}{p} f m_0 + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{e(e^2-2)\mu}{\sqrt{p}} f m_0 + (2-e^2)(\lambda^2-\mu^2)\right\} w\,,\\
\delta\varepsilon &= (1-\sqrt{1-e^2})\,\delta\varpi + \sqrt{1-e^2}\,\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\,\delta\theta + \\
&\qquad + \frac{2}{c_0^2 k^2 e^2}\left\{\frac{4e^2}{p} f^2(m_0^2+m^2) - \frac{5k^2e^2}{p} f m_0 - \right.\\
&\qquad \left. - \frac{k e \mu}{\sqrt{p}} f(7m_0+3m) + 4k^2(\lambda^2-\mu^2)\right\} w\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Dall'esame di questi valori rimane confermato che le disuguaglianze secolari dipendono dagli elementi del moto assoluto. Risultato questo che, oltre ad esser poco confortante (come osservammo) per la nuova teoria, ci impedisce, anche, di misurarne gli effetti in qualche pratica applicazione.

5. *Disuguaglianze secolari in casi speciali.* — Allo scopo di rendere espressivi i risultati conseguiti, esaminiamo a quali conclusioni siamo condotti nell'ipotesi che la velocità del sistema dei due corpi abbia direzioni particolari, oppure sia sensibilmente nulla. Il baricentro di detto sistema noi immagineremo si confonda col corpo maggiore [2].

[1] È quello che fanno anche Lehmann-Filhès ed Hepperger nei loro studî relativi agli effetti dovuti alla velocità di propagazione della gravitazione. Cfr. *Astronomische Nachrichten*, n. 2630; e *Sitzungsberichte der k. k. Ak. der Wiss.* [Mathematiche Classe], Vienna, 1888.

[2] Ciò è acconsentito, in prima approssimazione, per esempio nel caso del moto di un corpo del sistema planetario.

Consideriamo quattro casi:

1°) *La velocità del sistema sia diretta secondo l'asse maggiore*, sia cioè $\mu = \nu = 0$. Allora dalle (8) si deduce: $\delta\varphi = \delta\theta = 0$ e

$$\delta a = - \frac{a^3 e\lambda}{c_0^2 k \sqrt{p^3}} f m_0 w ,$$

$$\delta e = \frac{(2 - 3e^2)\lambda}{2 c_0^2 e^2 k \sqrt{p}} f m_0 w ,$$

$$\delta \varpi = \frac{1}{c_0^2} \left\{ \frac{2}{k^2 p} f^2 (m_0^2 + m^2) - \frac{f m_0}{p} + \frac{2 - e^2}{2e^4} \lambda^2 \right\} w .$$

Da queste relazioni risulta che se $\lambda > 0$ (cioè la velocità del sistema è diretta verso il perielio) è sempre $\delta a < 0$, nel mentre δe è positiva o negativa a seconda che $e^2 < \frac{2}{3}$ (come avviene per tutti i corpi del sistema planetario) o $e^2 > \frac{2}{3}$. I due corpi finiranno quindi a cadere uno sull'altro, ma con un movimento che, in relazione al valore di e, tende a divenire rettilineo o circolare.

Se la velocità del sistema è invece diretta verso l'afelio ($\lambda < 0$), esaminando i valori di δa e δe si conclude che i due corpi si allontanano indefinitamente descrivendo una traiettoria che va assumendo una forma circolare o rettilinea a seconda che è $e^2 < \frac{2}{3}$ o $e^2 > \frac{2}{3}$.

In ogni caso (almeno finchè l'orbita osculatrice conserva carattere ellittico) l'asse dell'orbita è soggetto ad uno spostamento continuo nel senso del moto del corpo minore.

2°) *La velocità del sistema abbia la direzione dell'asse minore*, si abbia cioè $\lambda = \nu = 0$. Allora dalle (8) otteniamo: $\delta a = \delta e = \delta\varphi = \delta\theta = 0$ e

$$\delta \varpi = \frac{1}{c_0^2} \left\{ \frac{2}{k^2 p} f^2 (m_0^2 + m^2) - \frac{1}{p} f m_0 + \frac{(e^2 - 2)\mu}{2 e^3 \sqrt{p}} f m_0 + \frac{e^2 - 2}{2 e^4} \mu^2 \right\} w.$$

In questo caso adunque la forza perturbatrice considerata ha solo per effetto di spostare l'asse dell'orbita, spostamento che, almeno per $\mu > 0$ e $e^2 \leq 2$, è diretto nel senso del moto di m.

3°) *La velocità del sistema sia diretta secondo la perpendicolare al piano dell'orbita*: perciò $\lambda = \mu = 0$, $\delta a = \delta e = 0$, e

$$\delta\varphi = - \frac{\nu f m_0}{c_0^2 e k \sqrt{p}} \operatorname{sen} g w ,$$

$$\operatorname{sen} \varphi \, \delta\theta = \frac{\nu f m_0}{c_0^2 e k \sqrt{p}} \cos g w ,$$

$$\delta\varpi = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \delta\theta + \frac{f}{c_0^2 p} \left\{ \frac{2 f (m_0^2 + m^2)}{k^2} - m_0 \right\} w .$$

Abbiamo così uno spostamento continuo solo nella posizione dell'orbita, spostamento che varia a seconda del verso della velocità del sistema, ed anche dal valore delle diverse costanti.

4°) *La velocità del sistema si consideri nulla*, sia cioè $\lambda = \mu = \nu = 0$. In questo caso si avvertono variazioni secolari solo nella longitudine del perielio, per la quale abbiamo

$$\delta\varpi = \frac{f}{c_0^2 p}\left\{\frac{2f(m_0^2+m^2)}{k^2} - m_0\right\} w\,.$$

Questa espressione dipende unicamente dal valore corrente della velocità della luce, e quindi dalla velocità di propagazione dell'attrazione. Nel caso di Mercurio in un secolo si ha $\delta\varpi = 14'',52$.

Chimica. — *Sulla reazione del nitroprussiato con l'acetone* [1]. Nota di Livio Cambi, presentata dal Socio A. Angeli.

La reazione cromatica del nitroprussiato con l'acetone in presenza di alcali venne proposta da Legal e Le Nobel [2] fino dal 1883. Questa reazione come era noto anche allora [3], non è affatto specifica per l'acetone: essa viene fornita con variazioni di colore più o meno spiccate non solo da altri chetoni e da aldeidi, ma anche da varie sostanze di natura diversa. Per opera di Belá v. Bittó [4] e del Denigès [5] la reazione venne studiata sistematicamente nei varî gruppi di composti.

La reazione si compie allorchè il nitroprussiato reagisce con la sostanza organica all'istante in cui si rende alcalina la soluzione: l'alcali in generale viene aggiunto al nitroprussiato dopo il composto organico o contemporaneamente ad esso.

Il meccanismo della reazione di Legal è tuttora incognito.

Il nitroprussiato, come venne stabilito dalle ricerche di K. A. Hoffmann [6] si trasforma in nitritoferropentacianuro per azione degli alcali: reazione reversibile per opera degli acidi:

$$\left[(CN)_5\overset{III}{Fe}\cdots\overset{II}{NO}\right]'' \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow[H']{OH'}} \left[(CN)_5\overset{II}{Fe}\cdots\overset{III}{NO_2}\right]''''$$

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Elettrochimica del R. Istituto Tecnico Superiore di Milano.

(2) Jahresb. Fortschritte d. Chemie, 1883, pag. 1648.

(3) Weyl (reazione con la creatinina), Berichte, 1878, pag. 2175.

(4) Denigès, Bulletin (3), 15, pag. 1058; Bull. (3), 17, pag. 381.

(5) Belá v. Bittó, Liebig's Annalen, 267, pag. 372.

(6) K. A. Hoffmann, Liebig's Annalen, 312, pag. 1.