ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 aprile 1913.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Formole generali per le superficie riferite alle loro linee asintotiche con alcune applicazioni* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Le formole per la teoria generale delle superficie a curvature opposte, riferite alle loro linee asintotiche come a linee coordinate, sono state poste sotto varie forme, tra le quali notevolissima è quella di Lelieuvre, che pone questa teoria in relazione colle equazioni di Moutard del tipo

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = M\theta ,$$

ed ha la massima importanza per la teoria delle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed inestendibili.

Nella presente Nota mi propongo di far conoscere un'altra forma delle equazioni stesse, che può riuscire vantaggiosa in diverse ricerche, e conduce ad una nuova nozione di *equazioni intrinseche* per le superficie a curvature opposte.

Dimostreremo che, per individuare una tale superficie, si possono dare ad arbitrio i seguenti elementi: 1° *due asintotiche* C, Γ *di diverso sistema*, 2° *l'espressione della curvatura* K *in funzione dei parametri* u, v *delle asintotiche.* Volendo meglio precisare queste condizioni iniziali, è da osservarsi che le due curve C, Γ, pure essendo date arbitrariamente, dovranno incrociarsi in un punto O dello spazio ed ivi avere torsioni eguali e di segno contrario e piano osculatore comune, condizioni queste notoriamente necessarie (teorema d'Enneper). Quanto ai parametri u, v, noi li supporremo dati, per fissare le idee, dagli archi stessi delle curve Γ, C, contati a partire dal loro punto comune O. Allora l'espressione $K = K(u, v)$ della curvatura (negativa) potrà assumersi affatto ad arbitrio, purchè soddisfi alla condizione (necessaria) di ridursi lungo le curve C, Γ al quadrato, cangiato di segno, della torsione di queste curve.

Fissati così arbitrariamente questi elementi, dimostreremo esistere *una ed una sola superficie* S che contiene C, Γ come asintotiche, e la cui curvatura K ha l'espressione prefissata

$$K = K(u, v).$$

Ad assicurare per altro l'applicabilità dei teoremi generali della teoria delle equazioni a derivate parziali al caso nostro, sarà necessario che ci restringiamo al *campo analitico*; pertanto le curve date C, Γ, come pure l'espressione $K(u, v)$ della curvatura, e la superficie finale stessa saranno supposte *analitiche*.

Una prima applicazione del teorema generale viene fatta nella presente Nota alle superficie caratterizzate dalla espressione

$$\text{(A)} \qquad K = -\frac{1}{[\varphi(u) + \psi(v)]^2}$$

della curvatura; una superficie di questa classe (A) viene determinata appena se ne fissano (ad arbitrio) due asintotiche C, Γ di diverso sistema. Si sa che le superficie (A) sono geometricamente caratterizzate dall'appartenere, come falde focali, a congruenze W per le quali le curvature in punti corrispondenti delle due falde focali risultano eguali. Le superficie loro *associate* nelle deformazioni infinitesime possono deformarsi in modo continuo con conservazione del sistema coniugato (u, v) e dànno tutte e sole le superficie con *sistema coniugato persistente*.

Di queste ultime superficie, dopo le ricerche fondamentali di Peterson e Cosserat, molti altri geometri si sono occupati, anche in tempi recenti. Ma nessuno sembra avere avuto conoscenza della teoria delle *trasformazioni per congruenze* W per le superficie della classe (A), già da me stabilita nel 1890 e riportata nel volume II delle mie *Lezioni* (§§ 249-252). Servendosi di queste trasformazioni, si possono trovare, *con sole quadrature*, quante si vogliano superficie con sistema coniugato persistente, ed in questo risultato generale sono incluse, come casi particolarissimi, molte delle ricerche posteriori indicate.

Credo pertanto opportuno di ritornare nella presente Nota su quei metodi di trasformazione, limitandomi, per brevità, al caso di quelle speciali superficie S della classe (A) che sono caratterizzate dall'avere *per asintotiche di un sistema curve a torsione costante*, per le quali cioè una delle due funzioni $\varphi(u)$, $\psi(v)$ si riduce ad una costante. Qui poniamo le trasformazioni sotto nuova forma e studiamo i sistemi (S) di tali superficie che nascono dall'applicare una successione continua di trasformazioni *infinitesime* della classe indicata. Come nel caso particolare delle superficie pseudosferiche ($\varphi(u) = \text{cost}$, $\psi(v) = \text{cost}$), ove si generano i sistemi obliqui di Weingarten, così anche nel caso attuale le traiettorie descritte dai singoli punti della superficie S sono *curve di Bertrand*, però di famiglia variabile coll'asintotica a torsione costante del sistema.

2. Abbiasi una superficie S a curvatura K negativa, che riferiamo alle sue linee asintotiche reali u, v e sia

$$ds^2 = H_1^2 du^2 + 2H_1H_2 \cos\omega \, du \, dv + H_2^2 dv^2 \tag{1}$$

il quadrato del suo elemento lineare, dove

$$ds_u = H_2 \, dv \quad , \quad ds_v = H_1 \, du \tag{2}$$

indicano gli archi elementari delle rispettive asintotiche $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$, ed $\omega = \omega(u, v)$ l'angolo delle asintotiche stesse. Indicheremo poi la curvatura (negativa) K con

$$K = -\frac{1}{T^2}.$$

Per il teorema d'Enneper (precisato nel segno) le torsioni $\frac{1}{T_u}$, $\frac{1}{T_v}$ delle asintotiche $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$ sono rispettivamente eguali l'una a $\frac{+1}{T}$, l'altra a $\frac{-1}{T}$, e noi supporremo

$$\frac{1}{T_u} = \frac{1}{T} \quad , \quad \frac{1}{T_v} = -\frac{1}{T}. \tag{4}$$

Come triedro principale nel punto (x, y, z) della superficie, introduciamo il triedro delle tre direzioni principali per l'asintotica $u = \text{cost}$: tangente, normale principale e binormale, i cui rispettivi coseni di direzione saranno indicati al solito con (α, β, γ), (ξ, η, ζ), (λ, μ, ν).

Le derivate di x, y, z rapporto ad u, v possono scriversi sotto la forma

$$\frac{\partial x}{\partial u} = H_1(\alpha \cos\omega + \xi \operatorname{sen}\omega) \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v} = H_2 \alpha \tag{5}$$

colle analoghe per y, z; ed è da notarsi che con queste formole si vengono ad attribuire ai coseni di direzione (X, Y, Z) della superficie i valori [1]

$$X = -\lambda \quad , \quad Y = -\mu \quad , \quad Z = -\nu. \tag{6}$$

[1] Cfr. *Lezioni*, vol. I, pag. 113.

Denotando con $\frac{1}{\varrho_u}$ la flessione delle $u = \text{cost}$, abbiamo dalle formole di Frenet

$$\frac{d\alpha}{ds_u} = \frac{\xi}{\varrho_u}\ ,\quad \frac{d\xi}{ds_u} = -\frac{\alpha}{\varrho_u} - \frac{\lambda}{T_u}\ ,\quad \frac{d\lambda}{ds_u} = \frac{\xi}{T_u}\ ,$$

e se introduciamo una nuova funzione L, ponendo

$$(7)\qquad \frac{1}{\varrho_u} = \frac{L}{H_2}\ ,$$

potremo scrivere

$$(8)\qquad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = L\xi\ ,\quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = -L\alpha - \frac{H_2}{T}\lambda\ ,\quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{H_2}{T}\xi\ .$$

Ora, le linee u, v essendo le asintotiche, pei coefficienti D, D'', D' della seconda forma fondamentale della superficie abbiamo

$$D = D'' = 0$$

$$(9)\qquad \frac{D'}{H_1^2 H_2^2 \operatorname{sen}^2 \omega} = -K = \frac{1}{T^2}\ .$$

Ma precisiamo anche il segno da attribuirsi a D' paragonando l'ultima delle (8) e le (6) colle formole fondamentali (II), pag. 117 delle *Lezioni*, e così si trova

$$(9)\qquad \frac{D'}{H_1 H_2 \operatorname{sen} \omega} = \frac{1}{T}\ .$$

Dopo di ciò, dalla formola (l. c.)

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{FD'}{EG - F^2}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{ED'}{EG - F^2}\frac{\partial x}{\partial v}\ ,$$

paragonando colle precedenti, si deduce

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{H_1}{T}(\alpha \operatorname{sen} \omega - \xi \cos \omega)\ .$$

In fine, per calcolare anche le derivate di α, ξ rapporto ad u, introduciamo l'altra *rotazione*

$$M = S\xi\frac{\partial \alpha}{\partial u} = -S\alpha\frac{\partial \xi}{\partial u}\ .$$

e risulterà

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = M\xi - \frac{H_1 \operatorname{sen} \omega}{T}\lambda\ ,\quad \frac{\partial \xi}{\partial u} = -M\alpha + \frac{H_1 \cos \omega}{T}\lambda\ .$$

Così per una qualunque superficie S, riferita alle sue linee asintotiche (u, v), abbiamo le formole fondamentali che riuniamo nel quadro seguente:

$$
(\mathrm{I})\quad\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = H_1(\alpha\cos\omega + \xi\,\mathrm{sen}\,\omega) \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v} = H_2\alpha \\
&\frac{\partial \alpha}{\partial u} = M\xi - \frac{H_1\,\mathrm{sen}\,\omega}{T}\lambda \quad , \quad \frac{\partial \xi}{\partial u} = -M\alpha + \frac{H_1\cos\omega}{T}\lambda\,, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{H_1}{T}(\alpha\,\mathrm{sen}\,\omega - \xi\cos\omega) \\
&\frac{\partial \alpha}{\partial v} = L\xi \quad , \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = -L\alpha - \frac{H_2}{T}\lambda \quad , \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{H_2}{T}\lambda\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Restano da scrivere le *condizioni di integrabilità* pel sistema (I), equivalenti alle equazioni di Gauss e di Codazzi.

Per le rotazioni, che figurano nella seconda e terza linea del quadro (I), troviamo le tre

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_1\cos\omega}{T}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_2}{T}\right) = \frac{H_1\,\mathrm{sen}\,\omega}{T}L\,, \\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_1\,\mathrm{sen}\,\omega}{T}\right) = -\frac{H_2}{T}M - \frac{H_1\cos\omega}{T}\lambda \\
&\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v} + \frac{H_1 H_2\,\mathrm{sen}\,\omega}{T^2} = 0\,,
\end{aligned}
\right.
$$

e per le traslazioni, nella prima linea del quadro (I), le altre due

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial v}(H_1\cos\omega) - \frac{\partial H_2}{\partial u} = H_1\,\mathrm{sen}\,\omega\,.\,L \\
&\frac{\partial}{\partial v}(H_1\,\mathrm{sen}\,\omega) = H_2 M - H_1\cos\omega\,.\,L\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Combinando opportunamente queste cinque equazioni, si ottiene subito il sistema equivalente seguente:

$$
(\mathrm{II})\quad\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial H_2}{\partial u} = \frac{H_1\cos\omega}{2T}\frac{\partial T}{\partial v} + \frac{H_2}{2T}\frac{\partial T}{\partial u} \\
&\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{1}{2H_2T}\left(\frac{H_1\,\mathrm{sen}\,\omega}{2T}\frac{\partial T}{\partial v} - H_1\cos\omega\,L\right) + \\
&\qquad + H_1\,\mathrm{sen}\,\omega\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{2H_2T}\frac{\partial T}{\partial v}\right) - \frac{H_1H_2\,\mathrm{sen}\,\omega}{T^2} \\
&\frac{\partial H_1}{\partial v} = \frac{H_1}{2T}\frac{\partial T}{\partial v} + \frac{H_2\cos\omega}{2T}\frac{\partial T}{\partial u} \\
&\frac{\partial \omega}{\partial v} = -L - \frac{H_2\,\mathrm{sen}\,\omega}{2H_1T}\frac{\partial T}{\partial u}
\end{aligned}
\right.
$$

mentre la rotazione M risulta espressa dalla formola

$$M = \frac{H_1 \operatorname{sen} \omega}{2H_2 T} \frac{\partial T}{\partial v}. \tag{10}$$

Viceversa se le cinque funzioni H_1, H_2, ω, L, T di u, v soddisfano le (II), le formole (I), nelle quali per M si ponga il valore (10), dànno un sistema illimitatamente integrabile e definiscono (intrinsecamente) una superficie S, riferita alle sue asintotiche u, v.

3. Ora pensiamo la funzione $T = T(u, v)$ *assegnata a priori*, cioè assegnata l'espressione della curvatura $K = -\frac{1}{T^2}$. Il sistema (I) delle quattro equazioni del 1° ordine per le quattro funzioni incognite

$$H_2, L, H_1, \omega$$

è un così detto sistema canonico del 1° ordine completamente integrabile [1]. La variabile u è principale per le funzioni (H_2, L), parametrica per le altre due (H_1, ω); invece v è principale per (H_1, ω) e parametrica per (H_2, L). Dai teoremi generali sui sistemi di equazioni a derivate parziali risulta che esiste uno ed un solo sistema integrale (olomorfo) che soddisfi alle condizioni iniziali seguenti:

1ª) H_2, L si riducono, per un valore particolare di u, sia $u = 0$, a funzioni arbitrarie date (olomorfe) della variabile v:

$$H_2(0, v) \quad , \quad L(0, v);$$

2ª) H_1, ω si riducano similmente per $v = 0$ a funzioni arbitrarie (olomorfe) di u

$$H_1(u, 0) \quad , \quad \omega(u, \omega).$$

[La funzione data $T(u, v)$ si suppone alla sua volta olomorfa].

Interpretando geometricamente queste condizioni, veniamo appunto a stabilire il teorema sulle equazioni intrinseche, indicato al n. 1, come ora andiamo a verificare.

Occupiamoci dapprima della parte del teorema che si riferisce alla *unicità*, e supponiamo adunque che le asintotiche $u = 0$, $v = 0$ debbano

(1) Usiamo qui la locuzione introdotta dal Bourlet nella sua Memoria: *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées*, Annales de l'École Normale Supérieure 3ème série, tom. VII (1891) Supplément.

I sistemi di equazioni a derivate parziali che si presentano nella massima parte delle ricerche di geometria infinitesimale appartengono alla forma tipica del Bourlet, od a questa si possono ridurre. Diventa quindi, anche geometricamente, d'importanza fondamentale il teorema per l'esistenza degli integrali stabilito a pag. 35 della citata Memoria (teorema VIII).

rispettivamente ridursi a due curve (analitiche) prefissate C, $\varGamma$, che si incrociano in un punto O dello spazio e soddisfano alle altre condizioni enumerate al n. 1. Fissiamo ancora che i parametri v, u abbiano il significato degli archi di queste rispettive curve C, $\varGamma$, contati a partire da O. Saranno per ciò note, come funzioni (olomorfe) di v, le due curvature

$$\frac{1}{\varrho_u}\ ,\ \frac{1}{T_u}$$

della $C(u=0)$, e così come funzioni (olomorfe) di u le curvature

$$\frac{1}{\varrho_v}\ ,\ \frac{1}{T_v}$$

della $\varGamma(v=0)$. Si suppone inoltre che la funzione prefissata (olomorfa) $\frac{1}{T(u\,,v)}$ si riduca per $u=0$ alla $\frac{1}{T_u}$ e per $v=0$ alla $-\frac{1}{T_v}$, conformemente alle formole (4).

Dimostriamo che le condizioni geometriche imposte equivalgono appunto a fissare le funzioni iniziali

$$\begin{aligned} &H_2(0\,,v)\quad,\quad L(0\,,v)\\ &H_1(u\,,0)\quad,\quad \omega(u\,,0)\,. \end{aligned}$$

Intanto, pel modo come abbiamo scelto i parametri u, v, risulta immediatamente

$$H_2(0\,,v)=1\quad,\quad H_1(u\,,0)=1\,;$$

poi dalla (7)

$$L(0\,,v)=\left(\frac{1}{\varrho_u}\right)_{u=0},$$

che dà $L(0\,,v)$ come funzione nota di v.

Per dimostrare in fine che anche $\omega(u\,,0)$ viene ad essere conosciuta, conviene calcolare gli elementi relativi alle asintotiche $v=\cos t$ del secondo sistema.

Indicando con α_1, ξ_1, λ_1 ecc. i coseni delle tre direzioni principali di queste curve, troviamo subito dalle equazioni fondamentali (I)

$$\alpha_1=\alpha\cos\omega+\xi\,\mathrm{sen}\,\omega,$$

e derivando rapporto ad u, coll'osservare le formole di Frenet e le (I) stesse, deduciamo

$$\frac{H_1}{\varrho_v}\,\xi_1=\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}+M\right)(-\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\omega+\xi\cos\omega)$$

colle analoghe per η_1, ξ_1. Abbiamo quindi

$$\frac{1}{\varrho_v} = \frac{\varepsilon}{H_1}\left(\frac{\partial \omega}{\partial u} + M\right) \qquad (\varepsilon = \pm 1) \tag{11}$$

$$\xi_1 = \varepsilon(-\alpha \operatorname{sen} \omega + \xi \cos \omega),$$

dove il segno di $\varepsilon = \pm 1$ deve essere tale da rendere (secondo le convenzioni fondamentali) $\frac{1}{\varrho_v}$ positivo. Dopo ciò abbiamo

$$\lambda_1 = \varepsilon\lambda \quad , \quad \mu_1 = \varepsilon\mu \quad , \quad \nu_1 = \varepsilon\nu ,$$

$$\frac{1}{T_v} = -\frac{1}{T} ;$$

ed ora il segno da attribuirsi ad ε viene fissato, dalle condizioni geometriche iniziali, come positivo o negativo secondo che in O le due direzioni positive delle binormali a C, Γ sono concordanti ovvero opposte.

Ora facciamo nella (11) $v = 0$, ed osserviamo che $\frac{1}{\varrho_v}$ diventa una funzione nota di u, sia $F(u)$, mentre $H(u, 0) = 1$; e d'altra parte

$$\frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial u} \quad , \quad \frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial v}$$

diventeranno pure, per $v = 0$, funzioni note di u, diciamo

$$\left(\frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial u}\right)_{v=0} = A(u) \quad , \quad \left(\frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{v=0} = B(u).$$

Se poniamo ancora, per maggiore chiarezza,

$$\omega(u, 0) = \overline{\omega}(u) \quad , \quad H_2(u, 0) = \overline{H}_2(u),$$

la (10), ove si faccia $v = 0$, porge

$$(M)_{v=0} = \frac{\operatorname{sen} \overline{\omega}}{\overline{H}_2} \cdot B(u),$$

e la (11) diventa

$$\frac{d\overline{\omega}}{du} + \frac{\operatorname{sen} \overline{\omega}}{\overline{H}_2} B(u) = \varepsilon F(u) .$$

D'altra parte la prima delle (II) dà per $v = 0$

$$\frac{d\overline{H}_2}{du} = B(u) \cos \overline{\omega} + A(u) \cdot \overline{H}_2 .$$

Le due equazioni del 1° ordine ora scritte per $\overline{\omega}(u)$, $\overline{H}_2(u)$ determinano queste funzioni dai loro valori iniziali per $u = 0$. Ma questi sono noti, il secondo come eguale a *1*, il primo come il valore ω_0 dell'angolo sotto cui si incontrano le due curve C, Γ in O. Così è perfettamente fissata la funzione

$$\omega(u\,,0)=\bar{\omega}(u)\,,$$

come si era asserito, ed il teorema di unicità è dimostrato.

Ma è facile ora, invertendo le considerazioni superiori, di trasformarlo in teorema di esistenza. E invero, assunti i valori iniziali

$$H_2(0\,,v)\,,\ L(0\,,v)\quad;\quad H_1(u\,,0)\,,\ \omega(u\,,0)$$

in modo conforme alle condizioni ottenute, si consideri il sistema integrale corrispondente delle (II)

$$H_2(u\,,v)\,,\ L(u\,,v)\quad;\quad H_1(u\,,v)\,,\ \omega(u\,,v)$$

il quale, per quanto si detto, esiste ed è unico.

Dalle formole (I) risulterà definita una superficie S, riferita alle asintotiche $u\,,v$, e su questa le curve $u=0\,,\ v=0$ avranno le medesime *equazioni intrinseche* delle curve prescritte C, Γ, ma inoltre anche la stessa posizione relativa, e per ciò coincideranno con esse.

Il teorema è così stabilito nelle sue due parti e possiamo brevemente enunciarlo sotto la forma:

Per definire una qualunque superficie S *a curvature opposte si possono dare ad arbitrio due linee asintotiche di contrario sistema, e l'espressione della curvatura in ogni punto, come funzione dei parametri asintotici.*

Un'immediata conseguenza di questo teorema generale è che: se si mantiene fissa l'espressione di $K(u\,,v)$, indi anche le torsioni di C, Γ, *ma si fanno variare ad arbitrio le loro flessioni*, come pure la posizione relativa delle due curve, si ottiene un'infinità di superficie (dipendente da due funzioni arbitrarie); e queste si corrispondono punto a punto per eguaglianza di curvatura nei punti corrispondenti e con conservazione delle linee asintotiche (dei sistemi coniugati).

Matematica. — *Le equazioni generali della Dinamica e la legge di gravitazione.* Memoria del Corrisp. E. ALMANSI.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie.*

Meccanica. — *Sui fenomeni ereditarii.* Nota del Socio VITO VOLTERRA.

Matematica. — *Resto nelle formole di quadratura, espresso con un integrale definito.* Nota del Corrisp. G. PEANO.

Le precedenti Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.