ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Meccanica. — *Sulla deformazione degli anelli circolari elastici soggetti a forze distribuite lungo il contorno.* Nota dell'ingegnere Giuseppe Albenga, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Nello studio di linee elastiche alquanto complesse può tornare utile il prendere le mosse dal principio del minimo lavoro espresso sotto la forma implicitamente contenuta in alcune interessanti ricerche di Walter Ritz su problemi di teoria dell'elasticità ed illustrata chiaramente da Hans Lorenz-Danzig in una recente Nota (1).

Indichiamo con L_i il lavoro interno di deformazione del corpo che si considera, con L_a il lavoro eseguito dalle forze esterne durante la deformazione, ritenendo al solito che queste forze crescano con continuità dal valore zero al valore finale: il teorema del minimo lavoro può scriversi, seguendo i citati autori:

$$L_i - 2\,L_a = \text{valore estremo.} \tag{1}$$

Quando nella (1) si facciano esplicitamente comparire le forze esterne ed alcune semplici funzioni degli spostamenti dei punti del solido è possibile giungere con ovvie trasformazioni ad equazioni differenziali della linea elastica che si prestano ad una integrazione relativamente agevole.

Così quando la deformazione sia abbastanza piccola perchè valga il principio del minimo lavoro, possiamo trovare, partendo dalla (1), la deformata di un anello circolare, omogeneo, di spessore costante e piccolo rispetto al raggio, sollecitato da forze distribuite lungo il contorno. Questo problema che per alcuni casi particolari fu risoluto da Saint Venant fin dal 1843 (2) ha una importante applicazione nel calcolo delle condotte forzate di grande diametro, delle quali il prof. Guidi si è occupato in una serie di Memorie, che esauriscono l'argomento sotto ogni suo pratico aspetto (3).

Indichiamo con ξ ed η rispettivamente lo spostamento tangenziale e quello radiale di un punto generico, con p e q le componenti radiale e tangenziale della forza esterna per unità di lunghezza dell'asse ed atteniamoci

(1) Cfr. H. Lorenz, *Näherungslösungen von Problemen der Elastizitätstheorie* nella Physikalische Zeitschrift, 1913, pag. 71 e Memorie ivi citate.

(2) *Mémoire sur le calcul de la résistance et de la flexion des pièces solides à simple et à double courbure.* Comptes Rendus, Paris, tom. 17, pp. 942 e 1020.

(3) Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1911-12 e 1912-13; cfr. anche le belle ricerche di Colonnetti negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, 1911-12 e nei Rendiconti dei Lincei, 1912, 2° semestre.

per le altre notazioni alle *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni* del professore Guidi.

Per r (raggio dell'asse) abbastanza grande di fronte allo spessore dell'anello e trascurando al solito il lavoro di deformazione dovuto al taglio avremo:

$$(2)\qquad L_i = \int_0^l \frac{M^2}{2EJ}\,ds + \int_0^l \frac{N^2}{2EF}\,ds$$

dove con l si indicò la lunghezza dello sviluppo dell'asse dell'anello. Ma, ricorrendo ad un sistema di coordinate polari avente l'origine nel centro dell'anello, abbiamo notoriamente [1]:

$$(3)\qquad M = \pm \frac{EJ}{r^2}\left(\frac{d^2\eta}{d\varphi^2} + \eta\right).$$

Poichè nella (2) entra solo il quadrato del momento flettente è superflua ogni convenzione riguardo ai segni.

Avremo inoltre

$$(4)\qquad N = EF\varepsilon_0 .$$

Ora proiettando sulla posizione occupata da un elemento ds prima della deformazione la poligonale costituita dagli spostamenti ξ ed η degli estremi di esso e dalla posizione finale dell'elemento deformato, si ha

$$(5)\qquad \eta = \frac{d\xi}{d\varphi} - r\varepsilon_0$$

e di qui e dalla (4)

$$(6)\qquad N = \frac{EF}{r}\left(\frac{d\xi}{d\varphi} - \eta\right).$$

Dalla (3) e dalla (6) risulta, sostituendo a ds il suo valore $r\,d\varphi$,

$$(7)\qquad L_i = \frac{EJ}{2r^4}\int_0^l r\left(\frac{d^2\eta}{d\varphi^2} + \eta\right)^2 d\varphi + \frac{EF}{2r^2}\int_0^l r\left(\frac{d\xi}{d\varphi} - \eta\right)^2 d\varphi .$$

Si ha poi subito

$$(8)\qquad L_a = \frac{1}{2}\int_0^l p\,\eta\, r\,d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^l q\,\xi\, r\,d\varphi$$

e quindi per la (1) dovrà aversi:

$$(9)\qquad \frac{EJ}{2r^4}\int_0^l \left(\frac{d^2\eta}{d\varphi^2} + \eta\right)^2 d\varphi + \frac{EF}{2r^2}\int_0^l \left(\frac{d\xi}{d\varphi} - \eta\right)^2 d\varphi - $$
$$- \int_0^l p\,\eta\,d\varphi - \int_0^l q\,\xi\,d\varphi = \text{valore estremo.}$$

[1] Vedasi ad es. A. Föppl, Technische Mechanik, vol. III, pag. 188, ed. 4ª od anche Encyclopädie d. Mathematischen Wissenschaften, IV, 2, II, pag. 337.

Ora il calcolo delle variazioni insegna che perchè sia minimo o massimo l'integrale

$$\int_0^l F\left(\eta, \frac{d\eta}{d\varphi}, \frac{d^2\eta}{d\varphi^2}, \dots \frac{d^n\eta}{d\varphi^n}, \xi, \frac{d\xi}{d\varphi}, \frac{d^2\xi}{d\varphi^2}, \dots \frac{d^m\xi}{d\varphi^m}\right) d\varphi$$

devono esser soddisfatte le equazioni

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial \eta} - \dfrac{d}{d\varphi}\dfrac{\partial F}{\partial \eta'} + \dfrac{d^2}{d\varphi^2}\dfrac{\partial F}{\partial \eta''} - \dots + (-1)^n \dfrac{d^n}{d\varphi^n}\dfrac{\partial F}{\partial \eta^{(n)}} = 0 \\ \text{e} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \xi} - \dfrac{d}{d\varphi}\dfrac{\partial F}{\partial \xi'} + \dots + (-1)^m \dfrac{d^m}{d\varphi^m}\dfrac{\partial F}{\partial \xi^{(m)}} = 0, \end{array}\right.$$

dove con $\eta', \eta'', \dots \eta^{(m)}, \xi', \xi'', \dots \xi^{(m)}$ si indicano rispettivamente le derivate prima, seconda ..... n^{ma}, m^{ma} di η e di ξ rispetto a φ. Le costanti di integrazione che risultano dalla risoluzione delle (10) possono nel nostro caso determinarsi per mezzo di condizioni di posa o di simmetria senza che sia necessario aver ricorso alle equazioni ai limiti.

Avremo quindi per le (9) e (10)

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{EJ}{r^4}\left(\dfrac{d^4\eta}{d\varphi^4} + 2\dfrac{d^2\eta}{d\varphi^2} + \eta\right) - \dfrac{EF}{r^2}\left(\dfrac{d\xi}{d\varphi} - \eta\right) = p \\ \text{e} \\ -\dfrac{EF}{r^2}\left(\dfrac{d^2\xi}{d\varphi^2} - \dfrac{d\eta}{d\varphi}\right) = q. \end{array}\right.$$

Eliminando la ξ fra la derivata prima delle (11) e la seconda di esse risulta

$$(12)\quad \frac{EJ}{r^4}\left(\frac{d^5\eta}{d\varphi^5} + 2\frac{d^3\eta}{d\varphi^5} + \frac{d\eta}{d\varphi}\right) = \frac{dp}{d\varphi} - q$$

e sostituendo a $\dfrac{d\eta}{d\varphi}$ il valore che si ricava dalla seconda delle (11)

$$(13)\quad \frac{EJ}{r^4}\left(\frac{d^6\xi}{d\varphi^6} + 2\frac{d^4\xi}{d\varphi^4} + \frac{d^2\xi}{d\varphi^2}\right) = \frac{dp}{d\varphi} - q - \frac{\varrho^2}{r^2}\left(\frac{d^4q}{d\varphi^4} + 2\frac{d^2q}{d\varphi^2} + q\right)$$

dove si è fatto $\varrho^2 = \dfrac{J}{F}$.

La (12) e la (13) sono le equazioni trovate per altra via, con lunghi calcoli da Federhofer: per quanto esse appaiono a prima vista molto complicate, pure nei casi della pratica si semplificano notevolmente [1]. In particolare nel caso di condotte forzate soggette all'influenza del peso proprio del tubo e alla pressione di acqua scompare il terzo termine del secondo membro della (13) e si giunge ad un'equazione relativamente semplice, anche volendo tener conto delle dilatazioni dell'asse.

D'ordinario è possibile trascurare gli allungamenti dell'asse dell'anello. In questo caso si ha facendo $\varepsilon_0 = 0$, per la (5)

$$\eta = \frac{d\xi}{d\varphi}. \tag{14}$$

La prima delle (11) diviene perciò

$$\frac{\mathrm{EJ}}{r^4}\left(\frac{d^4\eta}{d\varphi^4} + 2\,\frac{d^2\eta}{d\varphi^2} + \eta\right) = p \tag{15}$$

equazione differenziale lineare del 4° ordine, con equazione caratteristica molto semplice, la quale riesce utile quando l'anello sia sottoposto a sole forze radiali.

La (14) introdotta nella (12) dà poi

$$\frac{\mathrm{EJ}}{r^4}\left(\frac{d^6\xi}{d\varphi^6} + 2\,\frac{d^4\xi}{d\varphi^4} - \frac{d^2\xi}{d\varphi^2}\right) = \frac{dp}{d\varphi} - q \tag{16}$$

La (14) e la (16) sono le equazioni differenziali di un'asta ad asse circolare trovate da Lamb, studiando le piccole deformazioni dei solidi ad asse curvilineo [2].

Applichiamo i risultati precedenti al calcolo delle deformazioni di una condotta forzata orizzontale, posata lungo la generatrice infima e ripiena di acqua fino al vertice. Quando si trascuri di fronte all'unità il termine $\frac{1}{m^2}$, dove m è il coefficiente di Poisson, le equazioni ora trovate possono essere accettate.

Considerando come positive le forze dirette verso l'estremo della condotta, studiando l'equilibrio di un tronco lungo uno, misurando gli angoli a partire dalla verticale e assumendo come positivo il senso destrorso di rotazione si ha:

per la pressione idrostatica $p_1 = \omega r(1 - \cos\varphi)$

se con ω si indica il peso dell'acqua per unità di volume:

e per il peso proprio $p_2 = -\gamma s \cos\varphi$

$$q = -\gamma s \operatorname{sen}\varphi$$

[1] Cfr. Federhofer, *Theorie d. elastischen Kreisbogen* in Zeitschrift f. Architektur und Ingenieurwesen, 1910, col. 459 e *Zur Berechnung des Kreisringes*, ibid., 1912, pag. 303.

[2] Cfr. Lamb, *On the Flexure and the Vibrations of a curved Bar*. London Math. Society Proceedings, vol. 19, pag. 365 (1888).

dove γ è il peso specifico del materiale ed s lo spessore del tubo. Fatto

$$(\omega r + 2\gamma s)\,\frac{r^4}{\mathrm{EJ}} = c$$

tanto la (13) quanto la (16) dànno

$$\frac{d^6\xi}{d\varphi^6} + 2\,\frac{d^4\xi}{d\varphi^4} + \frac{d^2\xi}{d\varphi^2} = c \operatorname{sen} \varphi\,. \tag{17}$$

In problemi di questa natura, quando il battente sul vertice della condotta è nullo può trascurarsi la dilatazione ε_0. Con questa ipotesi osservando che per

$$\varphi = 0 \qquad \xi = 0 \qquad \text{e T, sforzo di taglio} = 0$$

e per

$$\varphi = \pi \qquad \xi = 0 \qquad \text{ed } \eta = 0$$

e che inoltre la tangente nei punti $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$ rimane orizzontale, si ha con facili riduzioni

$$\xi = \frac{c}{8}\left[4\varphi(1 + \cos\varphi) - (\pi^2 - \varphi^2) \operatorname{sen} \varphi\right]$$

ed

$$\eta = \frac{c}{8}\left[4(1 + \cos\varphi) - 2 \operatorname{sen} \varphi - (\pi^2 - \varphi^2)\cos\varphi\right].$$

Le equazioni precedenti definiscono la linea elastica della condotta e i risultati di esse prendono forma semplicissima per i punti che inizialmente giacevano sopra i diametri orizzontale e verticale.

Lo spostamento del vertice della condotta è dato ad esempio, per le relazioni ora trovate, da

$$\eta_v = \frac{c}{8}\,(8 - \pi^2)\,.$$

Le relazioni precedenti suppongono che la deformazione dell'anello non influisca sensibilmente sulla intensità e la direzione delle forze esterne. Questa ipotesi è sempre legittima quando gli spostamenti siano piccoli. I calcoli del prof. Guidi (1) mostrano come in pratica essa sia verificata quando le sollecitazioni del materiale siano inferiori al limite di elasticità. Solo in caso di anelli molto sottili e di conseguenza flessibilissimi i calcoli fatti più sopra cadono in difetto perchè le deformazioni e gli adattamenti dell'anello sotto l'azione delle forze esterne possono modificare sensibilmente le condizioni di equilibrio (2)

(1) Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1912-13.

(2) E. Winkler, nel 1860, aveva già notato questo fatto in un esteso studio sulla resistenza dei tubi e delle caldaie a vapore pubblicato nel Civilingenieur, vol. 6, col. 325 e 427. Si confrontino anche le critiche mosse dal Pearson ad alcuni dei risultati di queste ricerche nel II volume della History of the Theory of Elasticity, pag. 146 e seg.