ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Meccanica. — *Intumescenze e depressioni che dislivelli del letto determinano in un canale scoverto.* Nota di U. CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Ebbi già a caratterizzare (¹) l'andamento del pelo libero, in un canale scoverto a fondo orizzontale e in regime permanente, quando in una determinata sezione trasversale, e per tutta la larghezza, è rigidamente saldata sul letto una traversa verticale (fig. 1).

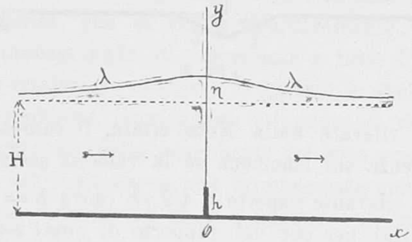

FIG. 1.

Più generalmente prendo ora in esame il caso in cui l'accidentalità del fondo è del tipo indicato in figura 2, essendo l'angolo α contato positivamente nel verso $x \longrightarrow y$, a partire dalla direzione positiva dell'asse x.

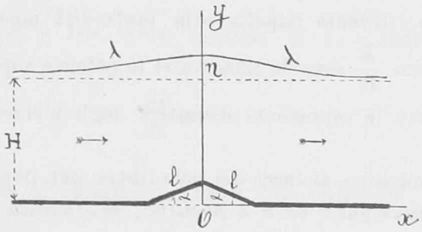

FIG. 2.

Il caso limite $\alpha = \frac{\pi}{2}$ corrisponde manifestamente alla fig. 1. Anche in generale si rende visibile una *intumescenza del pelo libero* nella regione soprastante la irregolarità del fondo.

(¹) *Sull'intumescenza del pelo libero nei canali a fondo accidentato.* Questi Rendiconti, 5 maggio 1912, pp. 588-593.

Il fenomeno si presenta alquanto differente quando il letto del canale è invece conformato come mostra la figura 3.

In luogo di una intumescenza si ha una *depressione del pelo libero*. Tuttavia, dal punto di vista analitico, basterà cambiare segno ad α per passare da un caso all'altro (¹).

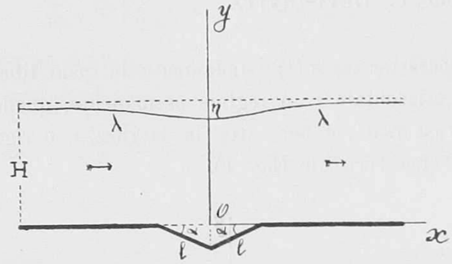

FIG. 3.

Come già feci rilevare nella Nota citata, il campo della gravità non reca sensibile influenza sul fenomeno se la velocità assintotica c della corrente è abbastanza rilevante rispetto a $\sqrt{2gh}$ (dove $h = l \operatorname{sen} \alpha$ e g è l'accelerazione di gravità) per cui del rapporto di quest'ultima alla prima si possono ritenere trascurabili le potenze superiori alla prima. Valendomi di questa favorevole circostanza mi propongo di assegnare l'integrale del moto della corrente, supposto permanente ed irrotazionale. La questione si può far rientrare in un problema già discusso (²), e condurla alle quadrature. La effettiva valutazione di queste quadrature presenta gravi difficoltà. Tuttavia nel caso, praticamente più interessante, in cui l'accidentalità del fondo è abbastanza poco rilevante rispetto alla profondità media del canale (H), per cui del rapporto $\frac{h}{\mathrm{H}}$ sono da trascurarsi le potenze superiori alla seconda, si possono assegnare le espressioni definitive degli elementi salienti del fenomeno.

Così per il massimo distacco del pelo libero dal livello medio ($y = \mathrm{H}$) [*altezza della intumescenza*, se α è *positivo*; *profondità della depressione*, se α è *negativo*] si ottiene l'espressione

$$\text{(I)} \qquad \eta = \frac{|\alpha|\, l^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2\pi \mathrm{H}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2}\right)} \right]^2 \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

(¹) Va naturalmente escluso il caso $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

(²) Colonnetti, *Sul moto di un liquido in un canale*. Rend. Circ. Mat. di Palermo, 1911, tom. XXXII, pp. 51-87.

essendo Γ la nota funzione euleriana; mentre per il pelo libero si ha la equazione:

$$(\text{II}) \qquad y = \mathrm{H} + \frac{\alpha\, l^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2\pi \mathrm{H}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}+\frac{1}{2}\right)} \right]^2 \operatorname{sech} \frac{\pi x}{2\mathrm{H}},$$

il sistema di riferimento essendo quello indicato: nella figura 2 per α positivo, e nella figura 3 per α negativo.

Per $\alpha = 0$ si ha $\eta = 0$, $y = \mathrm{H}$, come era evidente *a priori*. Per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ si ritrovano i risultati della mia Nota citata.

L'andamento qualitativo del profilo libero richiama alla mente l'*onda solitaria*. Questa affinità, che si rivela analiticamente nella (II), si può rendere espressiva immaginando di imprimere a tutto il sistema liquido-letto del canale, una traslazione uniforme c *opposta* a quella della corrente. Si ottiene allora il problema (equivalente dal punto di vista analitico) del liquido stagnante perturbato dallo scorrimento del letto sopra se stesso. Se α è positivo, l'aspetto del fenomeno è una intumescenza unica che si propaga in seno al liquido con velocità c; se α è negativo si ha la propagazione (con velocità c) di una depressione.

Quest'ultimo caso realizza qualitativamente l'andamento dell'*onda solitaria negativa*.

1. Indicando, al solito, con u e v le componenti di velocità, φ e ψ il potenziale di velocità e la funzione di corrente, se si pone

$$(1) \qquad x + iy = z \quad , \quad u - iv = w \quad , \quad \varphi + i\psi = f,$$

w ed f risultano, com'è ben noto, funzioni di z, e sono legate fra loro dalla relazione

$$(2) \qquad \frac{df}{dz} = w\,.$$

Coi cambiamenti di variabile, definiti dalle posizioni

$$(3) \qquad z = z(f) \quad , \quad f = i\mathrm{H} + \frac{2\mathrm{H}}{\pi} \log \frac{1-\zeta}{1+\zeta},$$

e avendo assunto $=1$, la velocità assintotica c, il campo del moto si può rappresentare, in modo conforme, nel semicerchio

$$|\zeta| = |\xi + i\eta| = \sqrt{\xi^2+\eta^2} \leq 1 \quad , \quad \eta \geq 0 \ (^1).$$

(1) Cfr. Colonnetti, loc. cit., § 6.

Riferendoci a tale campo, la espressione seguente soddisfa a tutte le condizioni indefinite e di contorno:

$$(4)\qquad w=\left[\left(\frac{1-i\zeta}{1+i\zeta}\right)^2\frac{(\zeta_1-\zeta)(\zeta-\zeta_2)}{(1-\zeta_1\zeta)(1-\zeta_2\zeta)}\right]^{\frac{\alpha}{\pi}},$$

ζ_1 e ζ_2 essendo due punti della semicirconferenza $|\zeta|=1$, $\eta\geq 0$, simmetrici rispetto all'asse immaginario ([1]).

Il punto del piano z da coordinare ad un ζ assegnato, rimane definito, per (2) e (3), dalla relazione:

$$(5)\qquad z=\int_{l \operatorname{sen}\alpha}^{\zeta}\frac{df}{w}=$$

$$=\frac{4\mathrm{H}}{\pi}\int_{\zeta}^{l \operatorname{sen}\alpha}\left[\left(\frac{1+i\zeta}{1-i\zeta}\right)^2\frac{(1-\zeta_1\zeta)(1-\zeta_2\zeta)}{(\zeta_1-\zeta)(\zeta-\zeta_2)}\right]^{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{d\zeta}{1-\zeta^2}.$$

Le formule (4) e (5) risolvono il problema in modo completo. In tal modo tutto è ridotto alla valutazione dell'integrale (5). Purtroppo in generale essa non si presenta punto agevole. Farò vedere tuttavia come sia possibile assegnare in modo esauriente l'andamento del pelo libero, quando l'accidentalità del letto è abbastanza piccola.

2. Per far descrivere all'ascissa z il pelo libero, bisogna che ζ percorra l'asse reale; in modo preciso: quando ζ varia da 1 fino a -1 si descriverà λ dall'infinito a monte fino all'infinito a valle. Poichè per $\zeta=0$, si deve avere $x=0$, avremo per un generico punto z del pelo libero

$$(6)\qquad z-iy_0=\frac{4\mathrm{H}}{\pi}\int_{\zeta}^{0}\left[\left(\frac{1+i\zeta}{1-i\zeta}\right)^2\frac{(1-\zeta_1\zeta)(1-\zeta_2\zeta)}{(\zeta_1-\zeta)(\zeta-\zeta_2)}\right]^{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{d\zeta}{1-\zeta^2},$$

essendo ζ reale e compreso tra -1 e $+1$, e y_0 designando l'ordinata del punto di λ che corrisponde a $\zeta=0$.

Indichiamo con σ_0 l'argomento di ζ_1, con che $\zeta_1=e^{i\sigma_0}$ e $\zeta_2=e^{i(\pi-\sigma_0)}=$ $=-e^{-i\sigma_0}$, e poniamo $\sigma_0=\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, designando ε un numero di cui sono trascurabili le potenze superiori alla seconda. Se si nota che, in virtù di

([1]) Cfr. Cisotti, *Vene fluenti*. Rendic. Circ. Mat. di Palermo (1908), tomo XXV, pag. 145 e seg., formula (37'), in cui si faccia $n=4$, $\vartheta_1=0$, $\vartheta_2=\alpha$, $\vartheta_3=-\alpha$; oppure Colonnetti, loc. cit., formula (56).

questa ipotesi $\zeta_1 = i(1 - i\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2)$, $\zeta_2 = i(1 + i\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2)$, la (6) diviene

$$z - iy_0 = \frac{4\mathrm{H}}{\pi} \int_\zeta^0 \left\{ 1 + i \frac{2\alpha\varepsilon^2}{\pi} \frac{\zeta(1-\zeta^2)}{1+\zeta^2} \right\} \frac{d\zeta}{1-\zeta^2},$$

dalla quale integrando, ponendo $z = x + iy$ e separando la parte reale dalla immaginaria, si ottengono le equazioni parametriche del pelo libero,

$$x = \frac{2\mathrm{H}}{\pi} \log \frac{1-\zeta}{1+\zeta} \quad , \quad y - y_0 = \frac{4\mathrm{H}\alpha\varepsilon^2}{\pi^2} \frac{1}{1+\zeta^2}, \tag{7}$$
$$(-1 \le \zeta \le 1).$$

Le due costanti y_0 ed ε vanno valutate esprimendo le seguenti due condizioni: *a*) che dev'essere $y = \mathrm{H}$ per $\zeta = \pm 1$; *b*) che $2l$ è la lunghezza del tratto non orizzontale del letto del canale [1]. Si ottiene così:

$$\left\{ \begin{aligned} y_0 &= \mathrm{H} - \frac{2\alpha\mathrm{H}\varepsilon^2}{\pi^2}, \\ \varepsilon &= \frac{\sqrt{\pi}\, l \operatorname{sen}\alpha}{2\mathrm{H}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2}\right)}, \end{aligned} \right. \tag{8}$$

essendo Γ la nota funzione euleriana.

(1) L'espressione dell'elemento lineare del piano z, cioè di $|dz| = |\sqrt{dx^2 + dy^2}|$, si può scrivere a norma di (2),

$$|dz| = \frac{|df|}{|w|},$$

il secondo membro potendosi esprimere in funzione di ζ, a mezzo di (3) e (4). Ciò posto, colla voluta approssimazione si ha

$$l = \int |dz| = \frac{2\mathrm{H}}{\pi} \int_0^\varepsilon \left(\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 - \sigma^2} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}} d\sigma = \frac{\mathrm{H}\varepsilon}{\pi} \int_0^1 t^{\frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{\alpha}{\pi}} dt.$$

Questo integrale non è altro che [cfr. ad es. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*. Leipzig, 1906, pag. 133]

$$\frac{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\operatorname{sen}\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)};$$

da ciò segue la seconda di (8).

Eliminando fra le (7) il parametro ζ e tenendo presenti le (8), si ha in definitiva l'equazione del pelo libero sotto la forma seguente:

$$(9) \qquad y = \mathrm{H} + \frac{\alpha\, l^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2\pi \mathrm{H}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2}\right)} \right]^2 \operatorname{sech} \frac{\pi x}{2\mathrm{H}} .$$

Da questa scende che il massimo scostamento del pelo libero dal livello medio $y = \mathrm{H}$, è

$$(10) \qquad \eta = \frac{|\alpha|\, l^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2\pi \mathrm{H}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2}\right)} \right]^2 .$$

Dalla seconda di (8), che definisce il significato di ε, si ha che *queste conclusioni sono applicabili tutte le volte che del rapporto* $\frac{h}{\mathrm{H}}$ *sono trascurabili le potenze superiori alla seconda, essendo* $h = l \operatorname{sen} \alpha$.

Per $\alpha = \frac{\pi}{\alpha}$ è il rapporto delle due funzioni Γ eguale a $\sqrt{\pi}$, e le (9) e (10) vanno a coincidere colle (16) e (17) della mia Nota citata.

Matematica. — *Un'osservazione sulle serie di potenze.* Nota del dott. L. Orlando, presentata dal Corrisp. A. Di Legge.

Sia

$$(1) \qquad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

una serie di potenze della variabile complessa r. In un punto regolare ζ, vale la relazione

$$(2) \qquad f(\zeta + h) = f(\zeta) + \frac{h^r}{r!} f^{(r)}(\zeta) + h^r \omega ,$$

dove $f^{(r)}$ è la derivata d'ordine più basso che non sia nulla nel punto ζ, ed ω denota una quantità che tende a zero se h tende a zero. In ζ supponiamo f diversa da zero.

Risolviamo l'equazione binomia in h

$$(3) \qquad \frac{h^r}{r!} f^{(r)}(\zeta) = \lambda f(\zeta) ,$$

dove λ sia un numero reale (positivo o negativo), tale da comportare un h