ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Meccanica. — *Moto lento di un fluido viscoso.* Nota del dottore LUIGI AMOROSO, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

La nostra Nota, *Integrazione delle equazioni del moto lento di un fluido viscoso* [2], contiene un errore [1]. Esso consiste nell'avere omesso i secondi membri delle equazioni

$$\frac{\partial \Gamma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_{13}}{\partial z} = \frac{1}{4\pi A} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_S \frac{dx_1\, dy_1\, dz_1}{r_1}$$

ecc..... (in cui è $r_1 = \sqrt{(x_1-\xi)^2 + (y_1-\eta)^2 + (z_1-\zeta)^2}$, A è il volume dello spazio S), equazioni che, sotto la forma qui scritta, debbono essere sostituite alle prime della (5).

Tale omissione si ripercuote in tutta la Nota, come pure nella successiva *Ancora dell'integrazione* [3] ecc.... Formalmente la correzione indicata porta a sostituire al nucleo $\frac{1}{r}$, $(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2})$, il nucleo

$$g(\xi, \eta, \zeta | x, y, z) = \frac{1}{r} - \frac{1}{A} \int_S \frac{dx_1\, dy_1\, dz_1}{r_1}.$$

Facciamo osservare che in questo modo il risultato principale (teorema di esistenza) non resta infirmato: solo le condizioni (2) vengono ridotte in quantochè l'ultima di esse $\left(\text{posto ivi } g \text{ al posto di } \frac{1}{r}\right)$ si riduce ad una identità.

In uno studio che abbiamo in preparazione ritorneremo più diffusamente sull'argomento, riprendendo la trattazione dell'intero problema.

(1) Cfr. questi Rendiconti, 2° semestre, fasc. 8° 1912.

(2) Ringraziamo il prof. T. Boggio, che ci ha fatto rilevare questo errore.

(3) Ibidem, fasc. 9°.

Eliminando fra le (7) il parametro ζ e tenendo presenti le (8), si ha in definitiva l'equazione del pelo libero sotto la forma seguente:

$$y = \mathrm{H} + \frac{\alpha\, l^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2\pi \mathrm{H}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2}\right)} \right]^2 \operatorname{sech} \frac{\pi x}{2\mathrm{H}} . \tag{9}$$

Da questa scende che il massimo scostamento del pelo libero dal livello medio $y = \mathrm{H}$, è

$$\eta = \frac{|\alpha|\, l^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2\pi \mathrm{H}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2}\right)} \right]^2 . \tag{10}$$

Dalla seconda di (8), che definisce il significato di ε, si ha che *queste conclusioni sono applicabili tutte le volte che del rapporto* $\frac{h}{\mathrm{H}}$ *sono trascurabili le potenze superiori alla seconda, essendo* $h = l \operatorname{sen} \alpha$.

Per $\alpha = \frac{\pi}{\alpha}$ è il rapporto delle due funzioni Γ eguale a $\sqrt{\pi}$, e le (9) e (10) vanno a coincidere colle (16) e (17) della mia Nota citata.

Matematica. — *Un'osservazione sulle serie di potenze.* Nota del dott. L. Orlando, presentata dal Corrisp. A. Di Legge.

Sia

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \tag{1}$$

una serie di potenze della variabile complessa r. In un punto regolare ζ, vale la relazione

$$f(\zeta + h) = f(\zeta) + \frac{h^r}{r!} f^{(r)}(\zeta) + h^r \omega , \tag{2}$$

dove $f^{(r)}$ è la derivata d'ordine più basso che non sia nulla nel punto ζ, ed ω denota una quantità che tende a zero se h tende a zero. In ζ supponiamo f diversa da zero.

Risolviamo l'equazione binomia in h

$$\frac{h^r}{r!} f^{(r)}(\zeta) = \lambda f(\zeta) , \tag{3}$$

dove λ sia un numero reale (positivo o negativo), tale da comportare un h

di così piccolo modulo che valga la (2): basterà che λ sia anch'esso di modulo sufficientemente piccolo.

Se h_1 è una radice della (3), sarà

$$f(\zeta + h_1) = f(\zeta)(1 + \lambda) + h_1^r \omega_1 . \tag{4}$$

Se ora ε denota un numero positivo sufficientemente piccolo, possiamo scrivere

$$f(\zeta + \varepsilon h_1) = f(\zeta)(1 + \varepsilon^r \lambda) + h_1^r \varepsilon^r \omega^\star , \tag{5}$$

dove $\omega^\star$ tende a zero se ε tende a zero. Per ε sufficientemente piccolo, noi possiamo, dunque, ritenere il modulo di $f(\zeta + \varepsilon h_1)$ maggiore del modulo di $f(\zeta)$, se λ è positivo; e minore, invece, se λ è negativo. Rimane, in ogni caso, stabilito che il modulo di $f(z)$ non può essere nè massimo nè minimo in un punto regolare, nel quale f non si annulli. Anche la parte reale di $f(z)$ può essere (in ogni punto ζ che sia regolare e che non sia radice per la funzione) aumentata o diminuita: dunque neanch'essa può ivi diventare massima o minima; ed altrettanto dicasi per la parte complessa.

Da questo semplicissimo risultato si ricava subito, in modo noto, il teorema d'esistenza delle radici di un polinomio. Si può inoltre dedurne un teorema di Liouville, che cioè una trascendente intera non può avere il suo modulo racchiuso in limiti fissi. Se, infatti, fosse, per assurdo, M un valore non superato dal modulo della trascendente intera

$$\mathrm{H}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots ,$$

allora il modulo di $\dfrac{\mathrm{H}(z)}{z}$, cioè di

$$\frac{c_0}{z} + c_1 + c_2 z + c_3 z^2 + \cdots ,$$

e quindi anche quello della serie di potenze

$$c_1 + c_2 z + c_3 z^2 + \cdots , \tag{6}$$

tenderebbe a zero per z infinito. Ora la (6) ha, come è bene evidente, lo stesso raggio di convergenza di H; dunque è anch'essa una trascendente intera. Ma se è nulla all'infinito, dev'essere identicamente nulla, perchè, in caso contrario, il suo modulo avrebbe, al finito, qualche punto di massimo, il che è contro ciò che abbiamo stabilito.

Ho voluto, con brevi e noti metodi, giungere a noti ed importanti risultati, per far vedere come alcune questioni, che ordinariamente si ritengono superiori all'ingegno e alla cultura dei principianti, sono invece a portata di mano, purchè non siano oscurate da ragionamenti poco intelligibili.