ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Matematica. — *Sul problema degli isoperimetri.* Nota di Leonida Tonelli, presentata dal Socio S. Pincherle.

1 [1]. Sia $F(x, y, x', y')$ la solita funzione del calcolo delle variazioni. Siano poi $P(x, y)$, $Q(x, y)$ due funzioni finite e continue nel campo A in cui è data (rispetto alle x, y) la F.

Consideriamo un campo A_0, limitato e chiuso, formato di punti *interni* ad A, e la classe K di tutte le curve C, continue, rettificabili, di A_0, soddisfacenti a certe condizioni, che siano però tali da risultare soddisfatte anche per ogni ente limite di curve di K (così ogni ente limite, se è rettificabile, appartiene necessariamente a K).

Vogliamo dimostrare la seguente proposizione:

Se è, per ogni punto (x, y) di A_0 e per ogni coppia (x', y') di numeri finiti non nulli insieme, $F > 0$, $F_1 \geq$ [2] *allora, fra tutte le curve C di K per le quali l'integrale*

$$I_C = \int_C \{ P(x, y)\, x' + Q(x, y)\, y' \}\, ds = \int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

assume un valore costante l, ve n'è almeno una che rende minimo l'altro integrale

$$J_C = \int_C F(x, y, x', y')\, ds \ \text{(3)}.$$

(1) Per semplicità considereremo qui solo curve piane, ma le cose che diremo valgono senz'altro anche per le curve dello spazio: basta per questo tener presente quanto si è stabilito al § IV della nostra Memoria: *Sul caso regolare nel calcolo delle variazioni* (Rendic. Circolo Mat. Palermo, 1913). Tale lavoro nel seguito verrà indicato con (T).

(2) $F_1(x, y, x', y')$ indica il solito invariante di Weierstrass

(3) Questo teorema, insieme a quello del n. 6, fu trovato per altra via da Hadamard (*Sur quelques questions de calcul des variations*, Annales Scientifiques de l'École Norm. Sup., 1907) sotto le seguenti ipotesi: *a*) K è la classe di tutte le curve rettificabili contenute in un dato campo e congiungenti due dati punti, oppure chiuse in se stesse; *b*) il campo è *extremal-kouvex* o, per lo meno, tale che le curve *minimum* da stabilirsi risultino *a priori* interne ad esso; *c*) è $F > 0$, $F_1 > 0$; *d*) P e Q hanno derivate parziali, prime e seconde, continue, ed è, in ogni punto del campo $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Dalla dimostrazione stessa dell'Hadamard, risulta poi che le curve *minimum* sono estremali.

2. Per la dimostrazione è necessario premettere il

LEMMA. — *L'integrale* I *è una funzione continua della linea di integrazione, se tal linea rimane sempre, in lunghezza, minore di un numero fisso.*

Da quanto si è stabilito al n. 10 di (T), risulta che, se una curva variabile C_1, costantemente inferiore, in lunghezza, ad un numero fisso, tende all'altra C, ed è sempre $F_1 = 0$, allora, preso un η positivo, arbitrario, da un certo punto in poi la C_1 soddisfa alla disuguaglianza

$$\left| \int_C F\,ds - \int_{C_1} F\,ds \right| < \eta .$$

E poichè nel caso attuale abbiamo al posto della F la $P(x,y)\,x' + Q(x,y)\,y'$, la condizione $F_1 = 0$ è soddisfatta, e il lemma resta stabilito.

Si potrebbe però giustamente obbiettare che mentre la funzione F, per la quale fu dimostrato il teorema di cui qui abbiamo fatto uso, deve avere le derivate parziali dei primi tre ordini, finite e continue, sulle P e Q noi abbiamo fatto semplicemente l'ipotesi della sola continuità. Ma l'obiezione si rimuove del tutto sostituendo alle funzioni P e Q due polinomî $P_n(xy)$, $Q_n(xy)$ che le rappresentino a meno di un ε arbitrario.

3. Dopo ciò, possiamo venir subito alla dimostrazione del teorema enunciato al n. 1.

Nella sotto classe $\overline{K}$ delle curve di K che soddisfano alla condizione $I = l$, l'integrale J ha un limite inferiore che indicheremo con j. Sia C_1, $C_2, \ldots, C_n, \ldots$ una successione di curve $\overline{K}$ tale che si abbia $\lim\limits_{n=\infty} J_{C_n} = j$. Per la continuità della F, si può fissare un numero $m > 0$ in modo che, in tutto A_0 per qualsiasi coppia (x', y') di numeri soddisfacenti alla relazione $x'^2 + y'^2 = 1$, sia $F > m$. Le lunghezze $\mathcal{L}_n$ delle C_n — avendosi $J_{C_n} \geq \mathcal{L}_n \,.\, m$ e, di conseguenza, $\text{Mass.}\lim \mathcal{L}_n \leq \dfrac{j}{m}$ — rimangono perciò tutte inferiori ad un numero determinabile L. Le C_n ammettono allora, per un ben noto teorema almeno una curva limite C, anch'essa inferiore in lunghezza a L ed appartenente a K. Per il lemma del n. 2, è poi, essendo, qualunque sia n, $I_{C_n} = l$: $I_C = l$. Questa C appartiene dunque anche a $\overline{K}$. M è (n. 10 di (T)) $J_C \leq \text{Min.}\lim J_{C_n} = \lim J_{C_n} = j$. Poichè C appartiene a $\overline{K}$, non può essere $J_C < j$; è dunque $J_C = j$, e la C dà il minimo che volevasi stabilire.

4. Supponiamo che la classe K sia tale — K′ — che, preso un arco qualsiasi di una sua curva C, del tutto *interno* ad A_0, si possa sempre determinarne un intorno, in modo che, variando l'arco con un altro qualsivoglia di detto intorno, non si esca dalla classe [1]. Una simile condizione

[1] Veramente, per il seguito, basterebbe che la cosa fosse verificata solo per quelle variazioni che non alterano il valore dell'integrale I.

è, per esempio, verificata se K è la classe di *tutte* le curve rettificabili di A_0 congiungenti due dati punti o due date linee, ed anche se è quella di *tutte* le curve rettificabili di A_0 che contengono o circondano i punti di un dato insieme chiuso [1]. Facciamo, inoltre, l'ipotesi che le funzioni P e Q ammettano delle derivate parziali del primo ordine, finite e continue, e che, in ciascun punto (x, y) di A_0, le coppie (x', y') che soddisfano all'uguaglianza $F_1(x, y, x', y') = 0$ non riempian mai alcun arco del cerchio $x'^2 + y'^2 = 1$. Ciò posto, sia (α, β) un arco, completamente *interno* ad A_0, di una delle curve *minimum*, dell'esistenza delle quali ci siamo occupati ai numeri precedenti.

Si possano presentare due casi, a seconda che su (α, β) è nulla o no la variazione prima dell'integrale I. Nel primo di essi, si ha, essendo s_0 e s_1 i valori dell'arco s corrispondenti agli estremi di (α, β),

$$\int_{s_0}^{s_1} \{(P_x x' + Q_x y')\, p + (P_y x' + Q_y y')\, q + P p' + Q q'\}\, ds ,$$

qualunque siano le funzioni $p(s)$, $q(s)$ (continue insieme alle loro derivate prime), sottoposte solo alla condizione di annullarsi per $s = s_0$ e $s = s_1$. Da qui scende che deve aversi, separatamente,

$$\int_{s_0}^{s_1} \{(P_x x' + Q_x y')\, p + P p'\}\, ds = 0 \quad , \quad \int_{s_0}^{s_1} \{(P_y x' + Q_y y')\, q + Q q'\}\, ds = 0 .$$

Procedendo col metodo conosciuto di Du Bois-Reymond, si giunge a stabilire che, essendo c_1 e c_2 due determinate costanti, le equazioni

$$P - \int_{s_0}^{s} \{P_x x' + Q_x y'\}\, ds = c_1 \quad , \quad Q - \int_{s_0}^{s} \{P_y x' + Q_y y'\}\, ds = c_2$$

devono essere soddisfatte in tutti i punti di (α, β) ad eccezione al più di un insieme di misura nulla [2]. Ma essendo le varie parti che entrano in queste equazioni tutte funzioni continue della s, ne viene che le equazioni stesse devono essere soddisfatte su tutto l'arco (α, β). Se ne trae, ad eccezione al più di un insieme di misura nulla,

$$P_x x' + P_y y' - (P_x x' + Q_x y') = 0 \quad . \quad Q_x x' + Q_y y' - (P_y x' + Q_y x') = 0$$

$$P_y = Q_x : \tag{1}$$

la quale ultima uguaglianza, per la continuità delle derivate P_y, Q_x, deve essere effettivamente verificata su tutto (α, β).

(1) In questo secondo caso però i punti dell'insieme andrebbero riguardati come facenti parte del contorno di A_0.

(2) Una dimostrazione analoga a questa, e sviluppata per disteso, trovasi nel mio lavoro *Sulle soluzioni discontinue del calcolo delle variazioni*, di prossima pubblicazione.

Nel secondo caso, quando cioè la variazione prima dell'integrale I non è nulla, deve essere, se poniamo $H = F + \lambda(Px' + Qy')$ (λ = costante isoperimetrica),

$$\int_{s_0}^{s_1} (H_x p + H_y q + H_{x'} p' + H_{y'} q')\, ds = 0\,,$$

ossia, ragionando come sopra,

$$(2) \qquad H_{x'} - \int_{s_0}^{s} H_x\, ds = c_1 \quad , \quad H_{y'} - \int_{s_0}^{s} H_y\, ds = c_2\,,$$

uguaglianze che devono risultare soddisfatte in tutti i punti di $(\alpha\,,\beta)$ ad eccezione al più di un insieme di misura nulla. Sia E l'insieme (di misura nulla) di quei punti di $(\alpha\,,\beta)$ nei quali le derivate $x'_s\,,y'_s$ o mancano o non soddisfano alla $x'^2 + y'^2 = 1$, e di quegli altri nei quali non è soddisfatta la prima (p. es.) delle due equazioni precedenti. Sia poi C(E) il complementare di E in $(\alpha\,,\beta)$.

Nei punti di C(E) esiste allora la tangente alla curva, e se indichiamo con $\theta(s)$ l'angolo, compreso fra 0 e 2π (2π escluso), che la sua direzione positiva forma con quella positiva dell'asse x, abbiamo $x'(s) = \cos\theta(s)$, $y'(s) = \operatorname{sen}\theta(s)$, e sempre, in tutti i punti di C(E), sarà soddisfatta l'uguaglianza

$$(3) \qquad Hx'(x\,,y\,,\cos\theta\,,\operatorname{sen}\theta) - \int_{s_0}^{s} H_x(x\,,y\,,\cos\theta\,,\operatorname{sen}\theta)\, ds = c_1\,.$$

Sia ora P un punto qualunque di E. Per essere E di misura nulla, potremo scegliere una successione $P_1\,,P_2\,,\ldots\,,P_n\,,\ldots$ di punti di C(E), tendenti a P. Indichiamo con θ_n l'angolo relativo alla tangente alla curva in P_n, e dimostriamo che esiste il $\lim\limits_{n=\infty}\theta_n$ [1]. Se, infatti, ciò non fosse, si potrebbero estrarre dalla successione delle θ_n altre due successioni $\theta_{n_r}\,,\theta_{n_s}$ $(r\,,s = 1\,,2\,,\ldots)$ aventi limiti ben determinati e distinti $\overline{\theta}\,,\overline{\overline{\theta}}$, rispettivamente. E poichè la (3) è sempre verificata su C(E), si avrebbe, indicando con $s_{n_r}\,,s_{n_s}$ i valori di s corrispondeuti a $\theta_{n_r}\,,\theta_{n_s}$,

$$H_{x'}(x(s_{n_i})\,,y(s_{n_i})\,,\cos\theta_{n_i}\,,\operatorname{sen}\theta_{n_i}) - \int_{s_0}^{s_{n_i}} H_x\, ds = c_1\,,\ (i = r\,,s)$$

e quindi anche, se $\overline{s}$ è il valore di s relativo a P,

$$H_{x'}(x(\overline{s})\,,y(\overline{s})\,,\cos\overline{\theta}\,,\operatorname{sen}\overline{\theta}) - \int_{s_0}^{\overline{s}} H_x\, ds = c_1\,,$$

$$H_{x'}(x(\overline{s})\,,y(\overline{s})\,,\cos\overline{\overline{\theta}}\,,\operatorname{sen}\overline{\overline{\theta}}) - \int_{s_0}^{\overline{s}} H_x\, dx = c_1\,,$$

[1] Diciamo che esiste il limite delle θ_n anche se alcune di esse tendono a 0 ed altre a 2π; e diciamo, in tal caso, che il limite comune è 0.

donde

$$H_{x'}(x(\bar{s})\,,\, y(\bar{s})\,,\, \cos\bar{\theta}\,,\, \operatorname{sen}\bar{\theta}) = H_{x'}(x(\bar{s})\,,\, y(\bar{s})\,,\, \cos\bar{\bar{\theta}}\,,\, \operatorname{sen}\bar{\bar{\theta}})\,.$$

Considerando allora la $H_{x'}(x\,,y\,,\cos\gamma\,,\operatorname{sen}\gamma)$ come funzione della sola γ, si avrebbe

$$\begin{aligned} H_{x'\gamma} &= -\,H_{x'x'}\operatorname{sen}\gamma + H_{x'y'}\cos\gamma = \\ &= -\,F_{x'x'}\operatorname{sen}\gamma + F_{x'y'}\cos\gamma = -\operatorname{sen}\gamma\, F_1(x\,,y\,,\cos\gamma\,,\operatorname{sen}\gamma)\,, \end{aligned}$$

e poichè la $F_1(x\,,y\,,\cos\gamma\,,\operatorname{sen}\gamma)$, per ipotesi, è sempre ≥ 0 e, come funzione della sola γ non può essere costantemente nulla in nessun tratto, se ne dedurrebbe l'annullamento di $\sin\gamma$ nell'*interno* dell'intervallo $(\bar{\theta}\,,\bar{\bar{\theta}})$, vale a dire, che dovrebbe essere $0 \leq \bar{\theta} < \pi < \bar{\bar{\theta}} < 2\pi$ oppure $0 \leq \bar{\bar{\theta}} < < \pi < \bar{\theta} < 2\pi$. Ma osserviamo che, facendo ruotare gli assi coordinati di un angolo α, gli angoli $\theta'_{nr}\,,\theta'_{ns}$ che sostituirebbero $\theta_{nr}\,,\theta_{ns}$ [1] dovrebbero tendere rispettivamente a $\bar{\theta}'\,,\bar{\bar{\theta}}'$ — con $\bar{\theta}' = \bar{\theta} - \alpha$ oppure $= \bar{\theta}' - \alpha + 2\pi$, e $\bar{\bar{\theta}}' = \bar{\bar{\theta}} - \alpha$ oppure $= \bar{\bar{\theta}} - \alpha + 2\pi$ — e dovrebbe ancora aversi $0 \leq \bar{\theta}' < \pi < \bar{\bar{\theta}}' < 2\pi$ oppure $0 \leq \bar{\bar{\theta}}' < \pi < \bar{\theta}' < 2\pi$; mentre, scegliendo opportunamente α, sarebbe sempre possibile far in modo che ciò non avvenisse [2]. Se ne conclude che non è possibile che esistano i due limiti distinti $\bar{\theta}$ e $\bar{\bar{\theta}}$, e che invece esiste un unico limite per le θ_n. Abbiamo così che, quando un punto arbitrario di C(E) tende al punto P di E, il corrispondente angolo θ tende ad un limite determinato ed unico. Se tal limite lo assumiamo come valore di θ in P, abbiamo la funzione $\theta(s)$ definita in tutti i punti di $(\alpha\,,\beta)$, funzione che risulta continua in tutti i punti di E. Ma se nel ragionamento fatto or ora, sostituiamo al punto P di E un punto qualunque di C(E), otteniamo che il $\lim \theta_n$ è precisamente il valore di θ relativo al punto stesso. La funzione $\theta(s)$ è dunque continua in tutto $(\alpha\,,\beta)$, e tali sono pure, di conseguenza, $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$. Ma in tutti i punti di $(\alpha\,,\beta)$, ad eccezione al più di un insieme di misura nulla, è $x' = \cos\theta\,,\ y' = \operatorname{sen}\theta$; si ha perciò che le $x(s)\,,y(s)$, essendo gli integrali di $\cos\theta(s)\,,\ \operatorname{sen}\theta(s)$, ammettono in tutto $(\alpha\,,\beta)$ delle derivate continue, date rispettivamente da $\cos\theta\,,\ \operatorname{sen}\theta$.

Le equazioni (2) sono allora soddisfatte su tutto $(\alpha\,,\beta)$, e su tutto tale arco sono pure soddisfatte le equazioni differenziali di Eulero

$$(4) \qquad \frac{dH_{x'}}{ds} - H_x = 0 \quad , \quad \frac{dH_{y'}}{ds} - H_y = 0$$

In ogni punto poi dove è $F_1 > 0$ esistono anche finite e continue le x'' e y''.

[1] Si avrebbe $\theta'_{n_r} = \theta_{n_r} - \alpha$ oppure $= \theta_{n_r} - \alpha + 2\pi$ e così per θ'_{n_s}.

[2] Se fosse, per es., $0 \leq \bar{\theta} < \pi < \bar{\bar{\theta}} < 2\pi$, basterebbe prendere $\alpha = \bar{\theta}$, nel caso che si avesse $\bar{\bar{\theta}} - \bar{\theta} \leq \pi$, e $\alpha = \bar{\bar{\theta}}$, nel caso contrario.

Concludiamo dunque che, *nelle ipotesi qui poste, ogni arco della curva minimum, completamente interno al campo* A_0, *soddisfa o all'equazione* (1) *o al sistema* (4) (il primo caso non escludendo però il secondo). È a notare che se l'arco $(\alpha\beta)$ soddisfa alla (1), ma appartiene ad un altro arco $(\alpha'\beta')$, anch'esso tutto interno ad A_0, e non soddisfacente per intero alla (1), allora il primitivo $(\alpha\beta)$ soddisfa pure al sistema (4); e la stessa cosa vale se (α, β) è interno ad una regione, per ogni punto della quale sia sempre verificata la (1). Si hanno poi i seguenti corollari: a) *se l'uguaglianza* (1) *è soddisfatta solo in punti che non riempiono mai alcun arco di curva, allora ogni arco di curva minimum, interno ad* A_0, *soddisfa interamente alle* (4); b) *se nussuna curva di* K' *soddisfa interamente alla* (1) *e la curva minimum è tutta interna ad* A_0, *allora essa soddisfa per intero alle* (4) (1).

5. Con metodo perfettamente identico a quello usato ai nn. 19 e 20 di (T), e tenendo conto del lemma qui stabilito, si dimostra il teorema di Osgood nei due casi seguenti. Siano le ipotesi del teorema del n. 1, e $\overline{C}$ una delle curve *minimum* ivi stabilite. Inoltre, per ogni altra curva C di K, appartenente propriamente (2) ad un certo intorno della $\overline{C}$ e per la quale sia $I_C = l$, si abbia (5) $J_C - J_{\overline{C}} > 0$. *È allora possibile determinare un intorno* (ϱ) *di* $\overline{C}$ *in modo che, ad ogni* $\varrho_1 < \varrho$ *corrisponda un numero* $\mu > 0$, *il quale soddisfi alla disuguaglianza* $J_C - J_{\overline{C}} > \mu$ *per ogni curva* C di K, *soddisfacente alla* $I_C = l$, *appartenente propriamente all'intorno* (ϱ) *di* $\overline{C}$, *e avente almeno un punto esterno all'intorno* (ϱ_1). Se si sopprime la condizione $F > 0$ e si sostituisce l'altra $F_1 \geq 0$ con la $F_1 > 0$, e si sa che per tutte le curve C di K, che appartengono propriamente ad un certo intorno della $\overline{C}$ e che soddisfano alla $I_C = I_{\overline{C}}$, è verificata la (5), allora il teorema precedente continua a sussistere.

6. Sia K_1 una classe K (n. 1) di curve, la quale sia tale che ad ogni suo elemento si possa aggiungere un arco di lunghezza arbitraria e percorso due volte, in senso contrario, senza uscire con ciò dalla classe stessa. Allora, presupponendo per le P, Q, la sola continuità, abbiamo: *Se è, per ogni punto di* A_0 *e per ogni coppia* (x', y') *di numeri finiti non nulli insieme,* $F > 0$, $F_1 \geq 0$, *fra tutte le curve di* K_1 *per le quali l'integrale* J *assume un valore costante* l, *ve n'è almeno una che rende minimo (massimo) l'integrale* I. Sia $\overline{K}$, la sottoclasse di tutte le curve di K_1 per le quali

(1) La condizione che la curva *minimum* sia tutta interna ad A_0 non è difficile che si possa stabilire a *priori*. Ciò avviene, per es., nel problema del minimo perimetro che racchiude una data area, e in varî altri. Si noti che la conclusione del corollario b) rimane giusta anche se esistono delle curve di K' che verificano per intero le (1), purchè per esse non sia $I = l$.

(2) Per la definizione di curve *appartenenti propriamente* ad un certo intorno di un'altra curva, vedi (T), n. 9.

è $J = l$: le curve di $\overline{K}_1$ risultano tutte in lunghezza inferiori ad un numero fisso, e se C_n $(n = 1, 2, ...)$ è una successione di esse, scelta in modo che sia $\lim I_{C_n} =$ al limite inferiore (superiore) dei valori di I in $\overline{K_1}$, da C_n se ne può estrarre un'altra C_{n_r} che tenda ad una curva limite $\overline{C}$. Questa curva deve appartenere a K_1, e per il teorema del n. 2, rende I uguale al limite inferiore (superiore) detto sopra. Per la semicontinuità inferiore di J, è poi $J_{\overline{C}} \leq \text{Min.} \lim J_{C_{n_r}} = l$. Se qui vale l'uguaglianza, il teorema proposto è già dimostrato; altrimenti, si aggiunga alla $\overline{C}$ un arco di lunghezza conveniente in modo che, percorso due volte, in senso opposto, dia all'integrale J, esteso alla nuova curva risultante $\overline{\overline{C}}$, precisamente il valore l, ed in modo anche che tal nuova curva appartenga a K_1. È allora $J_{\overline{\overline{C}}} = l$, $I_{\overline{\overline{C}}} = J_{\overline{C}}$, e si ha così il minimo (massimo) richiesto.

7. Consideriamo, come al n. 4, una classe K′ (essa è necessariamente anche una classe K_1) e supponiamo l'esistenza e la continuità delle derivate parziali prime di P e Q, e che le coppie (x', y') che annullano F_1 non riempian nessun arco del cerchio $x'^2 + y'^2 = 1$, quando si tenga fisso il punto (xy) di A_0. Con procedimento analogo a quello del numero ricordato, si stabilisce che *ogni arco di uva curva minimum* (*maximum*), *completamente interno ad* A_0, *soddisfa interamente ad almeno uno dei due sistemi di equazioni differenziali di Eulero* (4) relativi, uno alla funzione F, e l'altro alla $\overline{H} = \overline{\lambda}F + (Px' + Qy')$ ($\overline{\lambda} =$ costante isoperimetrica).

8. Nelle ipotesi del teorema del n. 6, e con l'aggiunta dell'altra, che ogni curva C di K_1, appartenente propriamente ad un certo intorno della curva minimum (maximum) $\overline{C}$ e soddisfacente alla $J_C = l$, verifichi la disuguaglianza $I_C - I_{\overline{C}} > 0$ (< 0), si dimostra il teorema di Osgood, analogamente a quanto si è stabilito al n. 5.

Fisica. — *Nuove ricerche sul calore specifico dei metalli a temperature elevate.* Nota di O. M. Corbino, presentata dal Socio P. Blaserna.

In alcune Note [1], che mi onorai di comunicare l'anno scorso all'Accademia, dopo di aver dedotto teoricamente la legge di variazione della temperatura di un filamento percorso da corrente qualora si modifichi di poco la resistenza totale del circuito, esposi una particolare disposizione del ponte di Wheatstone per mezzo della quale potei valutare con semplici misure galvanometriche la capacità calorifica del filamento. L'applicazione allo studio del tungsteno, di cui fu misurato il calore specifico fino a 2000°, mi permise di giungere a conclusioni notevoli, che consigliarono l'estensione della ricerca ad altri metalli.

[1] Corbino, Rend. Lincei, vol. XXI, 1° sem., pag. 181, 1912.