

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI  
ANNO CCCX.  
1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° SEMESTRE.



ROMA  
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

è  $J = l$ : le curve di  $\bar{K}_1$  risultano tutte in lunghezza inferiori ad un numero fisso, e se  $C_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) è una successione di esse, scelta in modo che sia  $\lim I_{C_n} =$  al limite inferiore (superiore) dei valori di  $I$  in  $\bar{K}_1$ , da  $C_n$  se ne può estrarre un'altra  $C_{n_r}$  che tenda ad una curva limite  $\bar{C}$ . Questa curva deve appartenere a  $K_1$ , e per il teorema del n. 2, rende  $I$  uguale al limite inferiore (superiore) detto sopra. Per la semicontinuità inferiore di  $J$ , è poi  $J_{\bar{C}} \leq \text{Min.} \lim J_{C_{n_r}} = l$ . Se qui vale l'uguaglianza, il teorema proposto è già dimostrato; altrimenti, si aggiunga alla  $\bar{C}$  un arco di lunghezza conveniente in modo che, percorso due volte, in senso opposto, dia all'integrale  $J$ , esteso alla nuova curva risultante  $\bar{C}$ , precisamente il valore  $l$ , ed in modo anche che tal nuova curva appartenga a  $K_1$ . È allora  $J_{\bar{C}} = l$ ,  $I_{\bar{C}} = J_{\bar{C}}$ , e si ha così il minimo (massimo) richiesto.

7. Consideriamo, come al n. 4, una classe  $K'$  (essa è necessariamente anche una classe  $K_1$ ) e supponiamo l'esistenza e la continuità delle derivate parziali prime di  $P$  e  $Q$ , e che le coppie  $(x', y')$  che annullano  $F_1$  non riempian nessun arco del cerchio  $x'^2 + y'^2 = 1$ , quando si tenga fisso il punto  $(xy)$  di  $A_0$ . Con procedimento analogo a quello del numero ricordato, si stabilisce che ogni arco di una curva minimum (maximum), completamente interno ad  $A_0$ , soddisfa interamente ad almeno uno dei due sistemi di equazioni differenziali di Eulero (4) relativi, uno alla funzione  $F$ , e l'altro alla  $\bar{H} = \bar{\lambda}F + (Px' + Qy')$  ( $\bar{\lambda}$  = costante isoperimetrica).

8. Nelle ipotesi del teorema del n. 6, e con l'aggiunta dell'altra, che ogni curva  $C$  di  $K_1$ , appartenente propriamente ad un certo intorno della curva minimum (maximum)  $\bar{C}$  e soddisfacente alla  $J_C = l$ , verifichi la disuguaglianza  $I_C - I_{\bar{C}} > 0$  ( $< 0$ ), si dimostra il teorema di Osgood, analogamente a quanto si è stabilito al n. 5.

Fisica. — *Nuove ricerche sul calore specifico dei metalli a temperature elevate.* Nota di O. M. CORBINO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

In alcune Note <sup>(1)</sup>, che mi onorai di comunicare l'anno scorso all'Accademia, dopo di aver dedotto teoricamente la legge di variazione della temperatura di un filamento percorso da corrente qualora si modifici di poco la resistenza totale del circuito, esposi una particolare disposizione del ponte di Wheatstone per mezzo della quale potei valutare con semplici misure galvanometriche la capacità calorifica del filamento. L'applicazione allo studio del tungsteno, di cui fu misurato il calore specifico fino a 2000°, mi permise di giungere a conclusioni notevoli, che consigliarono l'estensione della ricerca ad altri metalli.

<sup>(1)</sup> Corbino, Rend. Lincei, vol. XXI, 1° sem., pag. 181, 1912.

Un lavoro recentissimo del Pirani che, pur confermando i miei risultati, utilizza dei metodi certo meno suscettibili di esattezza, non toglie interesse alle esperienze che avevo già iniziate e che ho adesso espletato per fili di platino. Mi propongo di comunicare in questa Nota la disposizione generale delle nuove esperienze, riservandomi di farne noti i risultati in una Nota successiva.

Per sottoporre alla ricerca fili di diversa natura fu anzitutto necessario sostituire alla lampadina ordinaria a incandescenza un recipiente nel quale si potesse introdurre e cambiare a volontà i filamenti e che permettesse di estrarre l'aria fino a rarefazioni molto elevate. Fu perciò utilizzato un recipiente cilindrico, chiuso alla parte inferiore, e portante nella larga apertura superiore un tappo smerigliato, con la possibilità di migliorare la chiusura per mezzo di un canale contenente mercurio. Attraverso al tappo e ad esso saldati passano due fili ai quali vien fissato il filamento per mezzo del mastice in ossido d'argento ed essenza di lavanda. Il filamento, piuttosto lungo, è tenuto solo agli estremi e di là pende liberamente, cosicchè l'influenza dei sostegni è ridotta al minimo. Un tubo laterale serve per la connessione alla pompa Gaede e a un manometro per alte rarefazioni. Lasciando in funzione la pompa fu possibile garantire, con fili portati ad alta incandescenza, una rarefazione dell'ordine di 1/10.000 di millimetro.

La disposizione elettrica comprende alcune modificazioni essenziali a quella già usata nelle mie ricerche precedenti. E invero, poichè il passaggio della temperatura del filo da  $T_0$  a  $T_0 + \Theta$  si compie secondo una esponenziale, rispetto al tempo, il cui coefficiente è molto alto solo quando la temperatura  $T$  è assai elevata (col tungsteno il coefficiente in parola si abbassava da circa 20 a 1,5 quando la temperatura iniziale  $T$  si andava variando da  $2000^\circ$  a  $800^\circ$ ) la misura col galvanometro balistico della quantità di elettricità traversante il ponte nella fase di squilibrio non riusciva agevole a temperature più basse, e molto meno con fili di capacità calorifica maggiore.

Ho ricorso quindi alla seguente disposizione alquanto diversa. Il filamento  $F$  fa parte di un ordinario parallelogramma di Wheatstone; alla corrente  $i$  che lo traversa corrisponde una temperatura  $T_0$  e una resistenza  $r_0$ ; tutto è disposto perchè il galvanometro  $G$  non sia percorso da corrente. Sopprimendo bruscamente con un corto circuito la resistenza  $\mathcal{A}R$  nel circuito principale, aumenta la corrente nel filamento, e la sua temperatura subisce una variazione progressiva che è legata alla variazione finale  $\Theta$  secondo la formola

$$y = \Theta e^{-mt},$$

dove  $t$  è il tempo,

$$(1) \quad m = \frac{P}{c:a},$$

e P il coefficiente di  $\vartheta$  nella equazione differenziale che regge il fenomeno. Questa equazione, nel caso di un semplice circuito del quale fa parte il filamento e la resistenza zavorra R è la seguente:

$$\frac{c}{a} \frac{d\vartheta}{dt} + P\vartheta = 2 \frac{W}{a} \frac{\Delta R}{r_0 + R},$$

dove P si può calcolare nel modo da me allora riferito e gli altri simboli hanno il significato allora esposto. Nel caso attuale, poichè la variazione  $\Delta R$  della resistenza ha luogo nel circuito della pila, prima del parallelogrammo, l'equazione è alquanto diversa. Infatti, prima della soppressione  $\Delta R$ , ponendo (fig. 1)

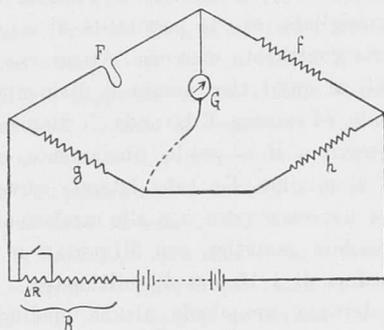


FIG. 1.

$$\frac{h}{f} : \left(1 + \frac{h}{f}\right) = \alpha$$

si ha

$$W = F(T_0) = \frac{e^2 r_0}{[R + (r_0 + f) \alpha]^2}.$$

Dopo la soppressione di  $\Delta R$  si ha invece

$$c \frac{d\vartheta}{dt} + F(T_0 + \vartheta) = \frac{e^2 r_0 (1 + a\vartheta)}{[R - \Delta R + [r_0(1 + a\vartheta) + f] \alpha]^2},$$

e da queste seguendo il procedimento allora indicato si deduce

$$(2) \quad \frac{c}{a} \frac{d\vartheta}{dt} + P\vartheta = 2 \frac{W}{a} \frac{\Delta R}{R + (r_0 + f) \alpha},$$

dove

$$(3) \quad P = W \frac{(r_0 - f) \alpha - R}{(r_0 + f) \alpha + R} + \frac{1}{a} \frac{dW}{dT}.$$

Finchè R è molto piccolo, come avveniva nelle precedenti esperienze, il valore di P può essere calcolato con la primitiva formola. In generale si

può avere però bisogno di ricorrere alla formola completa; e questo è il caso nella presente ricerca.

Alla variazione  $\vartheta$  della temperatura del filamento corrisponde una corrente nel galvanometro data da

$$i_g = I_g e^{-mt},$$

dove  $I_g$  denota il valore finale quando il filo ha raggiunto la nuova temperatura  $\Theta$  e la nuova resistenza  $r_0 + \Delta r_0$ . Basterà quindi registrare  $i_g$  con un galvanometro conveniente per dedurre dal diagramma il coefficiente  $m$ . Si ha d'altra parte dalla (1)

$$\frac{c}{a} = \frac{P}{m}.$$

Ma  $P$  si deduce facilmente oltre che dalla formola (3) anche dalla equazione (2) valida fino al raggiungimento asintotico della temperatura finale  $\Theta$ , nel qual caso

$$P\Theta = 2 \frac{W}{a} \frac{\Delta R}{R + (f + r_0)\alpha}.$$

E poichè

$$\Delta r_0 = r_0 \alpha \Theta$$

sostituendo si avrà

$$P = 2W \frac{\Delta R}{R + (f + r_0)\alpha} : \frac{\Delta r_0}{r_0}$$

e quindi

$$\frac{c}{a} = 2 \frac{W}{m} \frac{\Delta R}{R + (r_0 + f)\alpha} : \frac{\Delta r_0}{r_0}.$$

Il valore di  $\Delta r_0$  si misura facilmente cercando le nuove condizioni di equilibrio del ponte, in modo però da non modificare l'intensità della corrente che traversa il filamento; è facile perciò calcolare  $c/a$  o anche  $c : \frac{dr}{dT}$  essendo

$$a = \frac{1}{r_0} \frac{dr_0}{dT}.$$

Si ottiene così, dappoichè

$$W = i^2 r_0,$$

$$(4) \quad c : \frac{dr_0}{dT} = \frac{2i^2}{m} \frac{\Delta R}{R + (f + r_0)\alpha} : \frac{\Delta r_0}{r_0}.$$

La misura meno consueta è solo quella di  $m$ . Mi son servito per questo d'un galvanometro a fibra costruito dalla Cambridge Instrument Co.,

adattandovi un dispositivo ottico che permetteva di registrare su una pellicola fotografica avvolta su un tamburo il movimento della fibra. Il tamburo ruotava dentro una scatola provvoluta di una stretta fessura, per mezzo della quale solo una striscia sottilissima della pellicola, normale alla immagine della fibra, veniva impressionata quando quella era ferma. Col movimento del tamburo la deviazione della fibra dava luogo sulla pellicola a una fascia curvilinea di cui uno degli orli veniva utilizzato per le misure. Un *diapason* vibrante, munito di una punta d'ago sottile, dava per ombra sulla pellicola in moto una sinusoide, che segnava sul diagramma la misura del tempo.

Disgraziatamente in questi apparecchi galvanometrici non c'è proporzionalità tra la deviazione della fibra e la corrente che la produce; e inoltre gli scarti molto forti dalla legge di proporzionalità variano notevolmente col modificare la tensione della fibra. Fu perciò necessario in ciascun diagramma tracciare, oltre alla curva da studiare, un sistema di fasce, a fibra ferma, ottenute alterando l'equilibrio del ponte col modificare in modo misurato il rapporto delle resistenze di due branche adiacenti; rimaneva invariata la resistenza totale e così non si alterava l'intensità della corrente nel filamento e quindi la sua resistenza.

L'andamento d'una esperienza era il seguente. Chiusa la corrente principale, si teneva in azione la pompa Gaede, per lasciare costante la rarefazione, malgrado il riscaldamento del filo. La pressione si manteneva così inferiore a 1/10000 di millimetro, e costante. Dopo circa mezz'ora, necessaria perchè tutte le resistenze assumessero un valore definitivo, e la batteria di accumulatori si portasse a una tensione costante, si verificavano ed eventualmente si ripristinavano le condizioni di equilibrio del ponte. La connessione tra le branche  $gh$  era fatta attraverso a un filo d'argentana di circa 50 cm. sul quale poteva scorrere un contatto di presa per uno dei capi del galvanometro. Si aveva così la possibilità di alterare l'equilibrio del ponte, dopo averlo raggiunto in stato di regime, senza modificare le resistenze totali dei due tratti  $Ff$ ,  $gh$  e quindi senza modificare l'intensità della corrente e la resistenza del filamento.

Sopprimendo la resistenza  $AR$  con un corto circuito, la temperatura del filo si elevava progressivamente, e una corrente di andamento esponenziale percorreva il galvanometro, registrandosi sulla pellicola fotografica del tamburo in movimento. Intercettato il fascio di luce per qualche tempo, quanto ne occorreva perchè la temperatura del filo assumesse il nuovo valore definitivo, si producevano spostamenti misurati del contatto sul filo-ponte, per tre lunghezze uguali; ogni volta la fibra assumeva una posizione stabile indietro dalla posizione anteriore; e in quelle posizioni, occultando con una fessura verticale l'intero fascio luminoso e lasciando scoperto un bordo della fibra, si producevano tre nuove impressioni sulla pellicola. Così su questa si disegnava una fascia ad andamento esponenziale, che corrispon-

deva alla prima manovra, e tre fasce rettilinee parallele all'asse dei tempi, che *col loro orlo inferiore* disegnavano la traccia della fibra in corrispondenza di tre variazioni note nel rapporto delle resistenze  $g$  e  $h$ . Si ebbero così i diagrammi della fig. 2 che si riferiscono a diverse temperature ini-

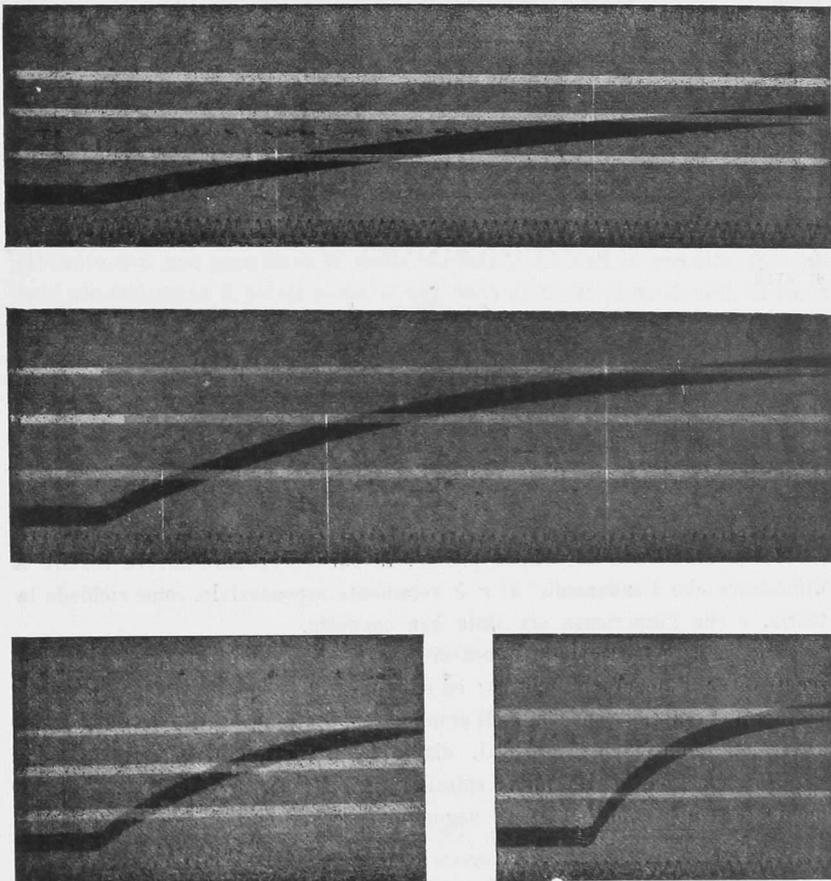


FIG. 2.

ziali del filamento, ottenute con intensità diverse della corrente principale. Venivano infine misurate l'intensità iniziale della corrente e lo spostamento  $D$  del contatto sul filo ponte ch'era necessario per riportare a zero la fibra, per compensare cioè la variazione totale  $\Delta r_0$  di resistenza del filamento. Detto  $q$  il valore in *ohm* d'un centimetro del filo-ponte, si ha, come è facile vedere,

$$\frac{\Delta r_0}{r_0} = Dq \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{h} \right)$$

Tutti gli altri elementi della formola (4) si leggevano direttamente sulle cassette di resistenza che formavano le branche del ponte. Restava solo da misurare  $m$ , procedendo all'esame dei fotogrammi.

A tal fine si segnavano i punti d'incontro dell'orlo superiore della fascia curvilinea con l'orlo inferiore delle fasce orizzontali, corrispondendo quegli orli al medesimo bordo della fibra; e si riferivano quei punti d'incontro alla sinusoide marcante i tempi; supponiamo che vi corrispondano a partire dalla fascia più bassa, i tempi  $t_1 t_2 t_3$ . Per quei valori del tempo l'alterazione di resistenza del filamento *contandola dal valore finale*  $r_0 + \Delta r_0$  che essa assumeva, era misurata da numeri proporzionali a 3 2, 1, e perciò se la resistenza varia secondo la legge

$$r = r_0 + \Delta r_0 (1 - e^{-mt})$$

si avrà

$$\Delta r_0 e^{-mt_3} = A$$

$$\Delta r_0 e^{-mt_2} = 2A$$

$$\Delta r_0 e^{-mt_1} = 3A$$

dove  $A$  è una costante.

Si deduce da queste:

$$m = \frac{\log_n 2}{t_3 - t_2} = \frac{\log_n 3}{t_3 - t_1}$$

Si avevano così due valori per  $m$ , la cui concordanza doveva servire a dimostrare che l'andamento di  $r$  è veramente esponenziale, come richiede la teoria, e che l'esperienza era stata ben condotta.

Le quattro curve della figura si riferiscono a temperature iniziali crescenti di un filamento di platino; ed esse mostrano come fortemente aumenta la rapidità della esponenziale all'aumentare della temperatura del filamento; altri fotogrammi, non riprodotti, danno le esponenziali ancora più lente.

La concordanza tra i due valori di  $m$  ottenuti per ciascuna fu veramente notevole, come mostra il seguente specchietto:

		Corrente in milliampere				
		29,5	50	73	104	150
$m$	{	0,572	1,576	3,18	6,30	11,95
		0,568	1,575	3,20	6,29	12,02
Media		0,570	1,575	3,19	6,29	12,0

Le medie sono arrotondate sulla terza cifra.

Il valore di  $c: \frac{dr}{dt}$  si ottiene per quoziente tra  $\frac{P}{r}$  ed  $m$ . È degno di nota che tanto  $P$  che  $m$  sono molto influenzati dalla pressione finale del gas intorno al filamento; ma il loro rapporto, che dà  $c/a$  rimane sensibil-

mente invariato. È sempre preferibile però tenere un'alta rarefazione intorno al filamento, perchè la temperatura di questo non varii continuamente, pel riscaldamento del gas, e non riesca con ciò difficile mantenere l'equilibrio nel ponte.

Il coefficiente  $m$  della esponenziale, a parità della corrente e quindi della temperatura del filamento, è pure influenzato dal fatto che la stessa variazione relativa di resistenza  $\frac{\Delta R}{R + (r_0 + f) \alpha}$  si produca con una forte o con una debole resistenza zavorra  $R$ ; ma si modifica in corrispondenza anche  $P$ , poichè risulta anche diverso il rapporto  $\frac{\Delta r_0}{r_0}$ , e il valore che si calcola per  $c: \frac{dr}{dt}$  resta, come dev'essere, invariato. Così il primo fotogramma, ottenuto con una resistenza  $R$  molto elevata e 52 volt in circuito, fu ripetuto con resistenza  $R$  piccolissima e una forza e. m. di circa 4 volt, in modo che la corrente avesse lo stesso valore di 29,5 milliampere. Il coefficiente  $m$  si mutò da 0,57 in 0,77, ma aumentò  $P$  nello stesso rapporto, e si ebbe per la capacità lo stesso valore. Ciò è utile a tener presente perchè non si creda che la rapidità della esponenziale sia determinata solo dalla temperatura iniziale del filo.

In una prossima Nota comunicherò i risultati numerici ottenuti con un filamento di platino, e la deduzione delle sue caratteristiche termo e calorimetriche fino alla temperatura di 1600°.

Fisica. — *Calorimetro ad anetolo*. Nota del dott. UGO GRASSI, presentata dal Socio A. RÒTTI.

Fisica. — *Sulla birifrangenza della sostanza corticale dei peli animali*. Nota I di A. POCHETTINO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Geologia. — *Sulla indipendenza delle acque sotterranee dell'Etna dalle precipitazioni atmosferiche*. Nota di G. PONTE, presentata dal Corrispondente G. DI STEFANO.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.