

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
ANNO CCCX.
1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° SEMESTRE.



ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 aprile 1913.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Superficie con un sistema di asintotiche a torsione costante e loro trasformazioni.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

4. Applicando i risultati generali sopra stabiliti ⁽¹⁾ alle superficie della classe (A), ove

$$K = - \frac{1}{\{\varphi(u) + \psi(v)\}^2},$$

vediamo che il teorema di unicità e di esistenza prende qui l'aspetto seguente:

Date ad arbitrio due curve C, Γ che escano da un punto O, avendo ivi a comune il piano osculatore, e torsioni eguali e di segno contrario, esiste una ed una sola superficie S della classe (A) che contiene le curve C, Γ come asintotiche.

E infatti, poichè le torsioni di C, Γ sono perfettamente note in funzione di v, u rispettivamente, avremo

$$\begin{aligned}\varphi(u) + \psi(0) &= A(u) \\ \varphi(0) + \psi(v) &= B(v),\end{aligned}$$

⁽¹⁾ Rendiconti, fascicolo precedente, pag. 403.

con $A(u)$, $B(v)$ funzioni note ed $A(0) = B(0)$; sarà quindi nota

$$T = \varphi(u) + \psi(v) = A(u) + B(v) - A(0) = A(u) + B(v) - B(0),$$

dopo di che basta applicare il teorema generale.

Le superficie S della classe (A) vengono così a dipendere da *quattro* funzioni arbitrarie (di una variabile ciascuna), le flessioni e le torsioni delle curve C , Γ . Questo è in armonia col fatto che la ricerca delle superficie S dipende da un'equazione a derivate parziali *del 4° ordine*; e sembra ben notevole che, nonostante la complicazione del problema analitico, si possa applicare agli integrali di questa equazione la teoria delle trasformazioni, come abbiamo ricordato al n. 1.

Particolarizziamo ancora questi risultati, e supponiamo che delle due curve C , Γ una, per es. la prima $u = 0$, sia a torsione costante, l'altra Γ rimanendo affatto arbitraria. La $B(v)$ si ridurrà ad una costante, e resterà quindi $T = T(u)$ funzione della sola u . Le superficie S corrispondenti sono quelle con linee asintotiche in un sistema ($u = \text{cost}$) a torsione costante, variabile però, in generale, dall'una all'altra asintotica. *Una superficie di questa classe speciale è individuata se si fissa arbitrariamente un'asintotica a torsione costante ed un'altra asintotica (arbitraria) nell'altro sistema* ⁽¹⁾.

Qui sono tre le funzioni arbitrarie che entrano nell'integrale generale, ed in effetto le attuali superficie sono integrali di una equazione a derivate parziali *del 3° ordine*, che si forma subito, nelle notazioni di Monge, come segue. Esprimendo che le linee lungo le quali è costante la curvatura totale

$$K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}$$

sono asintotiche, proprietà questa che caratterizza le nostre superficie, si ottiene la detta equazione del 3° ordine sotto la forma

$$(B) \quad r \left(\frac{\partial K}{\partial y} \right)^2 - 2s \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial K}{\partial y} + t \left(\frac{\partial K}{\partial x} \right)^2 = 0.$$

5. Limitandoci ormai a queste speciali superficie S colle asintotiche, in un sistema, a torsione costante, vediamo come si semplificano in questo caso le formole generali del n. 2.

Essendo qui

$$\frac{\partial T}{\partial v} = 0,$$

⁽¹⁾ Se anche la seconda asintotica è a torsione costante, la superficie individuata è pseudosferica e si ricade in un teorema noto.

la prima delle (II) dà

$$\frac{\partial H_2}{\partial u} = \frac{H_2}{2T} \frac{dT}{du},$$

e, integrando,

$$H_2 = V \sqrt{T},$$

dove V è una funzione di v , che, disponendo del parametro v , possiamo rendere $= 1$, onde

$$H_2 = \sqrt{T}.$$

L'arco s_u di un'asintotica $u = \text{cost}$, compreso fra due asintotiche $v = v_1$, $v = v_0$ dell'altro sistema, è dato quindi da

$$s_u = \int_{v_0}^{v_1} \sqrt{T} dv = \sqrt{T} (v_1 - v_0),$$

onde risulta il teorema:

Sopra le asintotiche a torsione costante le asintotiche dell'altro sistema intercettano archi proporzionali; il coefficiente di proporzionalità è $= \sqrt{T}$.

Ponendo ora nelle (II)

$$H_2 = \sqrt{T} = f(u),$$

queste diventano

$$(III) \quad \frac{\partial L}{\partial u} = -\frac{H_1 \sin \omega}{f^2(u)}, \quad \frac{\partial H_1}{\partial v} = f'(u) \cos \omega, \quad \frac{\partial \omega}{\partial v} = -L - \frac{f'(u) \sin \omega}{H_1}.$$

D'altra parte si ha per la (10)

$$M = 0,$$

e le formole (II) si semplificano per le attuali superficie nelle seguenti:

$$(IV) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = H_1(\alpha \cos \omega + \xi \sin \omega) & \frac{\partial x}{\partial v} = f(u) \cdot \alpha \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u} = -\frac{H_1 \sin \omega}{f^2(u)} \lambda, & \frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{H_2 \cos \omega}{f^2(u)} \lambda, & \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{H_1}{f^2(u)} (\alpha \sin \omega - \xi \cos \omega) \\ \frac{\partial \alpha}{\partial v} = L\xi, & \frac{\partial \xi}{\partial v} = -L\alpha - \frac{\lambda}{f(u)}, & \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\xi}{f(u)}. \end{cases}$$

Ogni terna di funzioni (L, H_1, ω) che soddisfi le (III) definisce intrinsecamente una superficie S con un sistema di asintotiche a torsione costante.

Se si suppone in particolare costante $f(u)$, per es. $f(u) = 1$, risulta dalle (III) che si può fare anche $G_1 = 1$, e queste si riducono alle due

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -\operatorname{sen} \omega, \quad \frac{\partial \omega}{\partial v} = -L,$$

ossia alla ben nota equazione fondamentale

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \operatorname{sen} \omega$$

della teoria delle superficie pseudosferiche.

6. Ritornando al caso generale di $f(u)$ variabile, supponiamo di trasformare ciascuna asintotica C del sistema $u = \text{cost}$, mediante una trasformazione di Bäcklund B_σ ⁽¹⁾, in un'altra curva C' colla medesima torsione costante $\frac{1}{f^2(u)}$.

Se $M \equiv (x, y, z)$, $M' \equiv (x', y', z')$ sono due punti qualunque corrispondenti di C, C' , e $\varphi = \varphi(u, v)$ l'angolo d'inclinazione del segmento

$$MM' = f^2(u) \cos \sigma$$

sopra la tangente alla C , le formole di trasformazione si scrivono

$$(12) \quad x' = x + f^2(u) \cos \sigma (\alpha \cos \varphi + \xi \operatorname{sen} \varphi),$$

e, restando dapprima σ una funzione arbitraria di u , l'angolo φ deve soddisfare alla equazione di trasformazione

$$(13) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{1 - \operatorname{sen} \sigma}{f(u) \cos \sigma} \operatorname{sen} \varphi - L.$$

Ora cerchiamo di prendere per $\sigma = \sigma(u)$ una tale funzione di u e determinare ulteriormente φ in guisa che la superficie S' , luogo delle trasformate C' , abbia queste curve per asintotiche, chè allora la S' apparterrà alla classe medesima di S , e sarà una sua *trasformata asintotica*.

Indicando cogli accenti le quantità relative alla curva C' , abbiamo

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha' &= [1 + (\operatorname{sen} \sigma - 1) \operatorname{sen}^2 \varphi] \cdot \alpha + (1 - \operatorname{sen} \sigma) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \cdot \xi - \\ &\quad - \cos \sigma \operatorname{sen} \varphi \cdot \lambda \\ \xi' &= (1 - \operatorname{sen} \sigma) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \alpha + [1 + (\operatorname{sen} \sigma - 1) \cos^2 \varphi] \xi + \\ &\quad + \cos \sigma \cos \varphi \cdot \lambda \\ \lambda' &= \cos \sigma \operatorname{sen} \varphi \alpha - \cos \sigma \cos \varphi \xi + \operatorname{sen} \sigma \lambda. \end{aligned} \right.$$

(1) Per le formole della trasformazione di Bäcklund delle curve a torsione costante si può consultare il § 11 della mia Memoria: *Configurazioni mobili di Möbius*, nei Rendiconti del Circolo matematico, tom. XXII (1908).

Sarà soddisfatta la condizione voluta se, insieme alla relazione identica

$$S\lambda' \frac{\partial x'}{\partial v} = 0,$$

sussisterà anche l'altra

$$S\lambda' \frac{\partial x'}{\partial u} = 0,$$

poichè allora le C' saranno asintotiche sulla S' . Ma l'ultima relazione, calcolata dalle (12), (14), osservando le (IV), ci dà questa seconda equazione a derivate parziali per la funzione incognita g :

$$(13') \quad \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{H_1(1 + \sin \sigma)}{f^2(u) \cos \sigma} \sin(g - \omega).$$

Se si scrive la condizione d'integrabilità pel sistema simultaneo (13), (13'), tenendo conto delle (III), si trova che $\sigma = \sigma(u)$ deve soddisfare alla equazione seguente:

$$\frac{1 + \sin \sigma}{\cos \sigma} \frac{f'(u)}{f^2(u)} = \frac{d}{du} \left(\frac{1 - \sin \sigma}{f(u) \cos \sigma} \right),$$

ovvero

$$2 \frac{f'(u)}{f^2(u)} = - \frac{d}{du} \log(1 + \sin \sigma),$$

da cui integrando

$$(15) \quad 1 + \sin \sigma = \frac{k}{f^2(u)},$$

essendo k una costante (arbitraria). Viceversa determinando σ in questo modo, qualunque sia k , le (13), (13') formano un sistema completamente integrabile ed ammettono quindi una soluzione g contenente, oltre k , una seconda costante d'integrazione. Le formole (12) danno quindi, per ogni valore di quest'ultima costante, una nuova superficie S' della classe di S , e sua trasformata asintotica. Diremo che la S' è trasformata di S per una B_k , ponendo in evidenza il valore di k scelto nella (15); così:

Ogni superficie S , con un sistema di asintotiche a torsione costante, dà luogo per una trasformazione (asintotica) B_k ad ∞^1 nuove superficie S' della medesima classe.

7. Dalla considerazione delle trasformazioni *finite* B_k per le superficie S passiamo a quella delle trasformazioni *infinitesime*, seguendo i concetti generali indicati in lavori precedenti ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Ved. la Nota in questi Rendiconti (ottobre 1912): *Intorno ad una nuova classe di superficie* e la Memoria negli Atti della Società delle Scienze (dei XL): *Sulla teoria della trasformazioni delle curve di Bertrand e delle superficie pseudosferiche* (t. XVIII, anno 1913).

a meno di un fattore costante. Così abbiamo

$$(17) \quad \begin{cases} \delta x = \varepsilon f^2(u) \cos \sigma \{ \sin \sigma \sin \varphi \alpha - \sin \sigma \cos \varphi \xi - \cos \sigma \lambda \} K \\ \delta \alpha = \varepsilon \{ (\sin \sigma - 1) \xi + \cos \sigma \cos \varphi \lambda \} K \\ \delta \xi = \varepsilon \{ 1 - \sin \sigma \} \alpha + \cos \sigma \sin \varphi \lambda \} K \\ \delta \lambda = -\varepsilon \cos \sigma (\alpha \cos \varphi + \xi \sin \varphi) K. \end{cases}$$

Resta da determinare K , o meglio le sue derivate logaritmiche rapporto ad u, v , ciò che si ottiene senza difficoltà variando le formole fondamentali (IV) e paragonando poi colle (17). Si ottengono così le formole (1)

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\partial \log K}{\partial u} = \frac{1 + \sin \sigma}{\cos \sigma} \sigma' - H_1 \frac{1 + \sin \sigma}{f^2(u) \cos \sigma} \cos(\varphi - \omega) \\ \frac{\partial \log K}{\partial v} = \frac{\sin \sigma - 1}{f(u) \cos \sigma} \cos \varphi. \end{cases}$$

Dopo ciò concludiamo: Ogni superficie S , con un sistema di asintotiche a torsione costante, ammette ∞^1 trasformazioni infinitesime $\bar{B}_k$ in superficie S_1 della medesima specie. Fissata la funzione trasformatrice φ , soluzione del sistema (13), (13'), la trasformazione infinitesima $\bar{B}_k$ è individuata dalle formole (17), (18).

8. Assoggettiamo ora una superficie S della nostra classe ad una successione continua di trasformazioni infinitesime $\bar{B}_k$, nelle quali manteniamo fissa la costante k . La superficie S percorrerà una serie ∞^1 di tali superficie, che diremo un sistema $\Omega_k(S)$, il passaggio da una qualunque S alla consecutiva nel sistema avvenendo per una trasformazione infinitesima $\bar{B}_k$.

Per studiare analiticamente i sistemi $\Omega_k(S)$, fisseremo la posizione della S , mobile entro il sistema, per mezzo di un parametro ω , o terza variabile, e tutti gli elementi relativi alla S ,

$$L, H_1, \omega, \varphi, K; x, \alpha \dots$$

(1) Si variino per esempio la seconda delle (IV) nella prima linea e la prima nella seconda linea, ciò che dà

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta x}{\partial v} &= f(u) \delta \alpha \\ \frac{\partial \delta \alpha}{\partial u} &= -\frac{H_1 \sin \omega}{f^2(u)} \delta \lambda - \frac{\delta(H_1 \sin \omega)}{f^2(u)} \lambda, \end{aligned}$$

e si osservino le (17).

diventeranno funzioni delle tre variabili u, v, w . Le formole (17) per le variazioni si cangiano ora in formole di derivazione rapporto a w , e diventano:

$$(IV^*) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial w} = f^2(u) \cos \sigma \{ \sin \sigma \sin \varphi \alpha - \sin \sigma \cos \varphi \xi - \cos \sigma \lambda \} \cdot K \\ \frac{\partial \alpha}{\partial w} = \{ (\sin \sigma - 1) \xi + \cos \sigma \cos \varphi \lambda \} \cdot K \\ \frac{\partial \xi}{\partial w} = \{ (1 - \sin \sigma) \alpha + \cos \sigma \sin \varphi \lambda \} \cdot K \\ \frac{\partial \lambda}{\partial w} = - \cos \sigma \{ \alpha \cos \varphi + \xi \sin \varphi \} \cdot K ; \end{cases}$$

esse sono da aggregarsi alle (IV).

Se scriviamo le condizioni d'integrabilità per le (IV*), paragonate con le (IV), otteniamo le cinque nuove equazioni seguenti, da aggregarsi alle (III):

$$(III^*) \quad \begin{cases} \frac{\partial K}{\partial u} = \left\{ \frac{1 + \sin \sigma}{\cos \sigma} \cdot \sigma' - \frac{H_1(1 + \sin \sigma)}{f^2(u) \cos \sigma} \cos(\varphi - \omega) \right\} \cdot K, \\ \frac{\partial K}{\partial v} = \frac{\sin \sigma - 1}{f(u) \cos \sigma} \cos \varphi \cdot K, \\ \frac{\partial L}{\partial w} = 2 \frac{1 - \sin \sigma}{f(u) \cos \sigma} \cos \varphi \cdot K, \quad \frac{\partial H_1}{\partial w} = \sigma' f^2(u) \sin(\varphi - \omega) \cdot K, \\ \frac{\partial \omega}{\partial w} = \left(2 - \frac{\sigma' f^2(u) \cos(\varphi - \omega)}{H_1} \right) K. \end{cases}$$

Le prime due non sono altro che le (18) ed esprimono che il passaggio dalla S alla consecutiva avviene per la B_k , cioè che si tratta di un sistema $\Omega_k(S)$.

Inversamente se le cinque funzioni

$$L, H_1, \omega, \varphi, K$$

di u, v, w soddisfano le (III), (III*), vengono ad essere identicamente soddisfatte le condizioni di integrabilità per le (IV), (IV*), le quali definiscono per ciò intrinsecamente un sistema $\Omega_k(S)$.

9. Si tratta ora di esaminare più da vicino il sistema (III), (III*) per le cinque funzioni incognite e vedere se ammette soluzioni, ed in quale arbitrarietà.

Intanto se le scriviamo ordinatamente nel quadro

$$(V) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial u} = -\frac{H_2 \sin \omega}{f^3(u)} \\ \frac{\partial L}{\partial w} = 2 \frac{1 - \sin \sigma}{f(u) \cos \sigma} \cos \varphi \cdot K \\ \frac{\partial K}{\partial u} = \left\{ \frac{1 + \sin \sigma}{\cos \sigma} \sigma' - \frac{H_1(1 + \sin \sigma)}{f^2(u) \cos \sigma} \cos(\varphi - \omega) \right\} \cdot K \\ \frac{\partial K}{\partial u} = \frac{\sin \sigma - 1}{f(u) \cos \sigma} \cos \varphi \cdot K \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_1}{\partial v} = f'(u) \cos \omega \\ \frac{\partial H_1}{\partial w} = \sigma' f^2(u) \sin(\varphi - \omega) \cdot K \\ \frac{\partial \omega}{\partial v} = -L - \frac{f'(u) \sin \omega}{H_1} \\ \frac{\partial \omega}{\partial w} = \left\{ 2 - \frac{\sigma' f^2(u) \cos(\varphi - \omega)}{H_1} \right\} \cdot K \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{H_1(1 + \sin \sigma)}{f^2(u) \cos \sigma} \sin(\varphi - \omega) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{1 - \sin \sigma}{f(u) \cos \sigma} \sin \varphi - L, \end{array} \right.$$

vediamo che esse formano un sistema lineare di forma canonica per le cinque funzioni incognite $L, H_1, \omega, \varphi, K$; le variabili principali sono

$$\begin{array}{ll} u, w & \text{per } L \\ v, w & \text{per } H_1, \omega \\ u, v & \text{per } \varphi, K. \end{array}$$

D'altronde se si formano dal sistema (V) i due valori di ciascuna delle derivate seconde *doppiamente principali*

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u \partial w}, \frac{\partial^2 H_1}{\partial v \partial w}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \partial w}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 K}{\partial u \partial v},$$

si trova ogni volta che essi coincidono, in forza delle (V) stesse. Il sistema (V) è dunque completamente integrabile, secondo Bourlet ⁽¹⁾, ed ammette quindi soluzioni dipendenti da cinque funzioni arbitrarie. Se prendiamo tre valori fissi di u, v, w , siano p. es. $u = 0, v = 0, w = 0$, esiste, in ordine al teorema fondamentale, uno ed un solo sistema integrale

$$(L, H_1, \omega, \varphi, K)$$

tale che:

$$\begin{array}{ll} \text{per } u = 0, w = 0 & , \quad L \text{ si riduca ad una funzione data di } v \\ \text{per } v = 0, w = 0 & , \quad H_1, \omega \text{ si riducano a funzioni prefissate di } u \\ \text{per } u = 0, v = 0 & , \quad \varphi, K \text{ si riducano a funzioni prefissate di } w. \end{array}$$

(¹) Cfr. Nota n. 3.

Resta da interpretare geometricamente questo risultato per i sistemi $\Omega_k(S)$. Delle cinque funzioni arbitrarie, una di queste è apparente dipendendo dall'arbitrarietà del parametro w , il quale potrà p. es. fissarsi in guisa da rendere

$$K(0, 0, w) = 1 \quad (1).$$

Così in realtà: *I sistemi $\Omega_k(S)$ dipendono da quattro funzioni arbitrarie.* Si riconosce subito il significato delle tre prime di queste, come inerenti alla superficie iniziale $w=0$ nel sistema $\Omega_k(S)$, la quale può quindi scegliersi ad arbitrio. Alla traiettoria $u=0, v=0$ è quindi inerente la quarta funzione arbitraria, onde segue che la traiettoria stessa non può essere una curva qualunque, e resta da vedersi quale è la proprietà geometrica che la caratterizza.

10. La risposta alla questione sopra enunciata si ottiene col seguente teorema:

Nei sistemi $\Omega_k(S)$ le traiettorie descritte dai singoli punti delle superficie S sono curve di Bertrand.

Per dimostrarlo basterà calcolare gli elementi relativi a queste traiettorie (w), che indicheremo colle notazioni consuete

$$\alpha_w, \xi_w, \lambda_w;$$

e così con $\frac{1}{\rho_w}, \frac{1}{T_w}$ le due curvatures. Dalla prima delle (IV*) abbiamo

$$ds_w = f^2(u) \cos \sigma \cdot K \cdot dw,$$

indi

$$(19) \quad \alpha_w = \sin \sigma \sin \varphi \alpha - \sin \sigma \cos \varphi \xi - \cos \sigma \lambda.$$

Poi dalle formole di Frenet

$$\frac{d\alpha_w}{ds_w} = \frac{\xi_w}{\rho_w},$$

e dalle (IV*) stesse

$$f^2(u) \cos \sigma \cdot K \frac{\xi_w}{Cw} = \left\{ \sin \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial w} + (1 - \sin \sigma) K \right\} (\alpha \cos \varphi + \xi \sin \varphi)$$

colle analoghe. Queste si risolvono nelle due

$$(20) \quad \xi_w = \varepsilon (\alpha \cos \varphi + \xi \sin \varphi), \text{ con } \varepsilon = \pm 1,$$

$$(21) \quad \frac{1}{\rho_w} = \frac{\varepsilon}{f^2(u)} \left\{ \frac{\tan \sigma}{K} \frac{\partial \varphi}{\partial w} + \frac{1 - \sin \sigma}{\cos \sigma} \right\}.$$

(1) Ciò equivale a prendere w proporzionale all'arco della traiettoria $u=0, v=0$.

Dalle (19), (20) risulta ora

$$(22) \quad \lambda_w = \varepsilon \{ \cos \sigma \sin \varphi \alpha - \cos \sigma \cos \varphi \xi + \sin \sigma \lambda \},$$

e derivando nuovamente rapporto a w

$$(21^*) \quad \frac{1}{T_w} = \frac{1}{f^2(u)} \left(\frac{1}{K} \frac{\partial \varphi}{\partial w} - 1 \right).$$

Paragonando le (21), (21*), si vede che fra $\frac{1}{\varrho_w}$, $\frac{1}{T_w}$ sussiste la relazione lineare

$$(23) \quad \frac{\varepsilon \cos \sigma}{\varrho_w} - \frac{\sin \sigma}{T_w} = \frac{1}{f^2(u)},$$

onde le traiettorie (w) sono in effetto curve di Bertrand. Di più si vede che la famiglia a cui la curva di Bertrand appartiene resta la stessa lungo un'asintotica $u = \text{cost}$, ma varia in generale, da un'asintotica all'altra.

Si osservi ora che le formole (12)

$$x' = x + f^2(u) \cos \sigma (\alpha \cos \varphi + \xi \sin \varphi),$$

ove si faccia $w = \text{cost}$, definiscono una superficie S' trasformata asintotica della S , e facilmente si proverebbe che queste ∞^1 superficie trasformate S' formano, alla loro volta, un nuovo sistema $\Omega_k(S')$, che diciamo il *coniugato* del primitivo $\Omega_k(S)$. Se le precedenti si scrivono sotto la forma

$$x' = x + \varepsilon f^2(u) \cos \sigma \xi_w,$$

ne segue che le traiettorie (w) in $\Omega_k(S')$ hanno comuni le normali principali con quelle del primitivo $\Omega_k(S)$, e sono quindi le loro curve di Bertrand coniugate.

Le proprietà ora osservate sono un'evidente generalizzazione di quelle stabilite in un precedente mio lavoro ⁽¹⁾ pei sistemi Ω_σ di superficie pseudo-sferiche, i quali si ottengono come caso particolare supponendo costante $f(u)$, indi σ . Così pure le altre proprietà dei sistemi Ω_σ trovano qui una corrispondente generalizzazione, facile ad osservarsi.

⁽¹⁾ *Sistemi obliqui di Weingarten*, Annali di matematica, ser. 3^a, tom. XIX (1912).

