ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

sistenti alla erosione meteorica e marittima si chiuda con periferia non molto lontana nè diversa da quella della spiaggia attuale.

Come dicevo la immediata controparte settentrionale di questo ultimo lembo, ed il suo contatto con le rocce verdi, coperti dal Pliocene e dal Quaternario, non si vedono.

Meccanica. — *Un integrafo per l'equazione differenziale dell'odografo relativo al movimento dei proiettili in un mezzo comunque resistente.* Nota del Corrisp. C. Pascal.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Resto nelle formule di quadratura, espresso con un integrale definito.* Nota del Corrisp. G. Peano.

Alcune formule di quadratura hanno il resto espresso mediante integrale definito. Tale è la formula di Taylor. Anche la formula sommatoria di Eulero ha un resto calcolato da Jacobi sotto forma d'integrale definito, e da cui si deducono le espressioni con valori medii. Caso particolare è la formula del trapezio:

$$\int_a^b fx\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}(fa+fb) + \text{Resto}\,,$$

ove

$$\text{Resto} = -\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)\,\mathrm{D}^2 fx\,\mathrm{d}x\,.$$

Di altre formule di quadratura si conosce solo il resto espresso mediante il valor medio d'una derivata. Tale è la formula detta di Simpson, e le formule di quadratura di Gauss, il cui resto fu calcolato dal prof. Mansion nell'anno 1887.

Di tutte le altre numerose formule di quadratura, non si conosce alcuna espressione del resto.

Il resto in ogni formula di quadratura si può sempre ridurre ad integrale, mediante la regola seguente. Uso i simboli del *Formulario mathematico* da me pubblicato, edizione 5ª, 1905-08:

$$\mathrm{R}\varepsilon\mathrm{qF(qFq)\,lin}\,.\,n\varepsilon\mathrm{N}_1 : f\varepsilon(\mathrm{qFq})\,\mathrm{integ}\,.\,\mathrm{grad}\,f < n\,.\supset_f.\,\mathrm{R}f = 0 :$$

$$f\,,\,\mathrm{D}^n f\varepsilon\mathrm{qFq} : \supset.\,\mathrm{R}f = \mathrm{S}\left\{\mathrm{R}\left[\frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\,(z-x)\,|\,z\,,\,\mathrm{q}\right]\mathrm{D}^n fx\,|\,x\,,\,\mathrm{q}\right\}$$

o espresso in linguaggio ordinario:

« Sia R una quantità funzione delle quantità funzioni di quantità; cioe supponiamo che Rf, l'R corrispondente ad f, sia un numero, tutte le volte che f è la caratteristica d'una funzione reale di variabile reale.

« Supponiamo che la funzione R sia lineare, o come si dice anche, distributiva; cioè $R(f+g) = Rf + Rg$; ed inoltre soddisfi ad alcune limitazioni di cui parleremo.

« Sono tali l'integrale di f, fra due limiti fissi; ed ogni funzione lineare ed omogenea dei simboli d'integrazione, di derivazione, di somme e di differenze finite sulla funzione f.

« Sia n un numero naturale; e supponiamo che comunque si prenda la funzione f, algebrica razionale intera, il cui grado sia però inferiore ad n, sempre si abbia $Rf = 0$; cioè il resto R sia nullo per tutte le funzioni intere di grado inferiore ad n.

« Allora sia f una funzione reale di variabile reale, avente la derivata d'ordine n (e quindi anche le precedenti). Il resto Rf, corrispondente a questa funzione f, si può esprimere mediante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (gx)\, D^n fx \, dx\,,$$

cioè mediante l'integrale, da $-\infty$ a $+\infty$, del prodotto d'una conveniente funzione gx, per la derivata d'ordine n della f.

« Il fattore gx per cui moltiplicheremo la derivata d'ordine n, è il valore del resto R corrispondente alla funzione

$$\frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\,(z-x),$$

in cui la variabile è z, che assume tutti i valori reali.

« Sign z, « il segno di z », è la funzione discontinua, che per $z > 0$, ha il valore $+1$, per $z < 0$, vale -1; e $\mathrm{sign}\,0 = 0$; e della quale si hanno espressioni analitiche semplicissime ».

Si può cambiare un po' la forma del resto, introducendo un altro fattore di discontinuità:

$$x \varepsilon \mathrm{q} \,.\, \supset .\, \varphi x = \frac{1}{2}\,(1 + \mathrm{sign}\, x)\,;$$

φx è quella funzione di x, che per x positivo vale $+1$, e per x negativo vale 0. Si ha:

$$x \varepsilon \mathrm{q} \,.\, \supset .\, \mathrm{sign}\, x = 2\varphi x - 1 = 1 - 2\varphi(-x)\,.$$

Sostituisco questi valori di sign x nell'espressione precedente del resto; osservo che per ipotesi il resto corrispondente alla funzione intera $\dfrac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!}$

ove varia z, è nullo; ed ho una seconda espressione del resto:

$$\mathrm{R}f = \mathrm{S}\left\{ \mathrm{R}\left[\frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi(z-x) \,|\, z\,,\,\mathrm{q} \right] \mathrm{D}^n fx \,|\, x\,,\,\mathrm{q} \right\}$$

ovvero una terza:

$$\mathrm{R}f = (-1)^n\,\mathrm{S}\left\{ \mathrm{R}\left[\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi(x-z) \,|\, z\,,\,\mathrm{q} \right] \mathrm{D}^n fx \,|\, x\,,\,\mathrm{q} \right\}.$$

Si ottengono altre espressioni, aggiungendo alla funzione $\frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi(z-x)$, ove varia z, della seconda espressione un polinomio arbitrario di grado $n-1$ in z.

La ricerca del fattore gx tale che $\mathrm{R}f = \int_{-\infty}^{+\infty} (gx)\,(\mathrm{D}^n fx)\,\mathrm{d}x$ si può fare come segue. Considero una funzione f, la cui derivata d'ordine n è nulla da $-\infty$ ad un valore x, vale 1 da x ad un valore $x' > x$, e vale 0 da x' a $+\infty$. Siccome questa derivata è discontinua in x ed x', in questi punti si dovrà parlare di derivate destre e sinistre, o di derivata generale. Una funzione f, la cui derivata n-esima ha le proprietà volute è:

$$\frac{(z-x)^n}{n!}\,\varphi(z-x) - \frac{(z-x')^n}{n!}\,\varphi(z-x')\,.$$

Allora $\mathrm{R}f = \int_x^{x'} gx\,dx$, e

$$gx = \lim_{x'=x} \frac{\mathrm{R}f}{x'-x} = \lim \mathrm{R}\left[\frac{(z-x)^n\,\varphi(z-x) - (z-x')^n\,\varphi(z-x')}{n!\,(x'-x)} \,|\, z\,,\,\mathrm{q} \right].$$

La quantità di cui si prende la R è un rapporto incrementale, col segno —; il suo limite è la derivata rispetto ad x; questa derivata si fa come se $\varphi(z-x)$ fosse costante; invero per $z > x$, $\varphi(z-x) = 1$, e anche, per $x < x' < z$ sarà $\varphi(z-x') = 1$; e per $z < x$, sarà $\varphi(z-x) = \varphi(z-x') = 0$. Fatta la derivata, si ha:

$$gx = \mathrm{R}\left[\frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi(z-x) \,|\, z\,,\,\mathrm{q} \right]$$

che sostituito nella espressione $\mathrm{R}f$, qualunque sia f, dà la seconda forma del resto cercato.

La proprietà fondamentale della funzione lineare R è

$$\mathrm{R}(f+g) = \mathrm{R}f + \mathrm{R}g\,.$$

Di qui, se m è un numero razionale, si deduce $\mathrm{R}(mf) = m(\mathrm{R}f)$. Per pas-

sare al caso di m irrazionale, Cauchy suppose la continuità della R, anche nel caso semplicissimo in cui la variabile f, di cui si prende la R, sia un numero. Altri fecero ipotesi meno restrittive. Il *Formulario* tratta solo delle funzioni lineari dei complessi d'ordine finito. Qui, come in altri lavori, la variabile, che è l'andamento della funzione, è un complesso d'ordine infinito non numerabile. Noi supponiamo che la funzione R contenga solo operazioni integrali, e di derivata d'ordine minore di n; la applicheremo a sole funzioni f, per cui esistano gli integrali e le derivate che occorrono. E supponiamo che tutti i valori che si considerano della variabile, siano compresi in un intervallo finito.

Applichiamo la regola precedente a calcolare:

$$\mathrm{R}f = fb - \left[fa + (b-a)\,\mathrm{D}fa + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{D}^{n-1}fa \right],$$

ove $a, b \varepsilon \mathrm{q}$, e supporremo $a < b$, e f è una funzione reale definita, con la sua derivata d'ordine n, nell'intervallo da a a b. Il resto cercato è il noto resto della formula di Taylor; esso è nullo se f è funzione intera di grado $< n$.

Si calcoli perciò

$$\mathrm{R}\left[\frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi(z-x) \,|\, z, \mathrm{q} \right],$$

cioè il resto precedente, corrispondente alla funzione che da $-\infty$ ad x, vale 0, e da x a $+\infty$ è rappresentata dalla parabola d'ordine $n-1$: $\frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!}$, in cui varia z.

Se $x < a$, nell'intervallo da a a b, la funzione è appunto intera di grado $n-1$, perciò $\mathrm{R}[\cdots] = 0$.

Se $x > b$, nell'intervallo da a a b, la funzione è sempre zero; perciò $\mathrm{R}[\cdots] = 0$.

Se $a < x < b$, e posto per un momento $fz = \frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi(z-x)$, sarà $fb = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}$; $fa = \mathrm{D}fa = \cdots = \mathrm{D}^{n-1}fa = 0$; perciò $\mathrm{R}[\cdots] = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}$.

Pertanto, essendo f una funzione qualunque, si avrà:

$$\mathrm{R}f = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{R}\left[\frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi(z-x) \,|\, z, \mathrm{q} \right] \mathrm{D}^n fx\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{D}^n fx\,\mathrm{d}x,$$

che è l'espressione del resto, data da Lagrange nel 1797, e da cui si deducono tutte le forme in cui compaiono valori medii della derivata n-esima.

Viceversa, dall'espressione del resto sotto forma d'integrale, nella formula di Taylor, possiamo dedurre l'espressione del resto nelle formule di quadratura.

Sia a un numero minore di tutti quelli che si considerano nella formula di quadratura.

La formula di Taylor col resto dà:

$$fz = \text{polinomio di grado } n-1 \text{ in } z + \int_a^z \frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{D}^n fx \, \mathrm{d}x \, ;$$

ovvero, col fattore di discontinuità:

$$fz = \text{polinomio ecc.} + \int_a^\infty \frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(z-x) \, \mathrm{D}^n fx \, \mathrm{d}x \, .$$

Calcolo il resto R sulla f; osservo che il resto R del polinomio di grado $n-1$ in z vale 0, per ipotesi, e rimane:

$$\mathrm{R}f = \mathrm{R}\left[\int_a^\infty \frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(z-x) \, \mathrm{D}^n fx \, \mathrm{d}x \,|\, z \, , \mathrm{q}\right].$$

Si può commutare il simbolo di funzione lineare R col simbolo di integrale

$$\mathrm{R}\left[\int_a^b f(x \, , z) \, \mathrm{d}x \,|\, z \, , \mathrm{q}\right] = \int_a^b \mathrm{R}\,[f(x \, , z) \,|\, z \, , \mathrm{q}] \, \mathrm{d}x$$

e si ha nel caso nostro:

$$\mathrm{R}f = \int_a^\infty \mathrm{R}\left[\frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(z-x) \,|\, z \, , \mathrm{q}\right] \mathrm{D}^n fx \, \mathrm{d}x \, .$$

Se $x < a$, la funzione $\left[\frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(z-x) \,|\, z \, , \mathrm{q}\right]$ è intera di grado $n-1$ in z, per tutti i valori che si considerano nel calcolo; perciò la R corrispondente è zero; ed $\int_{-\infty}^a \mathrm{R}\,[\cdot\cdot] \, \mathrm{D}^n fx \, \mathrm{d}x = 0$; onde aggiungendo questo integrale nullo, si ha:

$$\mathrm{R}f = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{R}\left[\frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(z-x) \,|\, z \, , \mathrm{q}\right] \mathrm{D}^n fx \, \mathrm{d}x \, ,$$

che è appunto la formula da dimostrarsi.

Come esempio, applicherò la regola precedente al calcolo di

$$\mathrm{R}f = \int_{-1}^{+1} fx \, \mathrm{d}x - \frac{1}{3}\,[f(-1) + 4f0 + f1]$$

quantità nulla per le funzioni f di grado inferiore al quarto. Questo resto è la differenza fra l'integrale e la formula di quadratura data da Cavalieri nel 1639, Gregory nel 1668, Cotes nel 1722, e Simpson nel 1740. La formula si suol indicare col nome dell'ultimo. Vedi *Formulario*, pag. 368.

Se $x < -1$, si ha $\mathrm{R}\left[\frac{(z-x)^3}{6}\varphi(z-x)\,|\,z\,,\,\mathrm{q}\right]$, cioè il resto corrispondente alla funzione sempre nulla da $-\infty$ ad x, e coincidente con la parabola cubica $(z-x)^3/6$ da x a $+\infty$, vale zero, perchè nell'intervallo considerato da -1 a $+1$, la funzione è di terzo grado.

Se $x > 1$, si ha pure $\mathrm{R}[\cdots] = 0$, perchè $\varphi(z-x)$ è sempre $= 0$, finchè $-1 < z < 1$.

Se $0 < x < 1$, posto per un momento $fz = \frac{(z-x)^3}{6}\varphi(z-x)$, si avrà

$\int_{-1}^{+1} fz\,\mathrm{d}z = \int_x^1 \frac{(z-x)^3}{6}\,\mathrm{d}x = (1-x)^4/24$. E si ha pure $f1 = (1-x)^3/6$,

$f0 = 0\,,\, f-1 = 0$. Onde:

Se $0 < x < 1$, si ha

$$\mathrm{R}[\cdots] = (1-x)^4/24 - \frac{1}{3}(1-x)^3/6 = -(1-x)^3(x+1/3)/24.$$

Se $-1 < x < 0$, basta nella formula precedente scambiare x in $-x$.

Quindi colla nostra regola, si avrà:

$$\mathrm{R}f = -\int_0^1 \frac{1}{24}(1-x)^3\left(x+\frac{1}{3}\right)\mathrm{D}^4 fx\,\mathrm{d}x -$$

$$-\int_0^1 \frac{1}{24}(1-x)^3\left(x+\frac{1}{3}\right)\mathrm{D}^4 f(-x)\,\mathrm{d}x\,,$$

che si può anche scrivere:

$$\mathrm{R}f = -\frac{1}{24}\int_0^1 (1-x)^3\left(x+\frac{1}{3}\right)(\mathrm{D}^4 fx + \mathrm{D}^4 f-x)\,\mathrm{d}x.$$

Siccome il fattore, che moltiplica $\mathrm{D}^4 f$, conserva segno costante nell'intervallo di integrazione, si può portare fuori il $\mathrm{D}^4 f$, in cui alla variabile si dia un valore medio u, e si avrà, eseguite le integrazioni,

$$\mathrm{R}f = -\frac{32}{4!\,5!}\mathrm{D}^4 fu\,, \qquad \text{ove } -1 < u < 1\,,$$

formula che pubblicai nel 1887, deducendola come sarà detto appresso.

In questo caso, si ha nuova soltanto l'espressione del resto sotto forma di integrale.

Per avere resultati nuovi, la sig.na P. Quarra, calcolò, e presentò alla R. Accademia delle Scienze di Torino, in seduta del 30 marzo 1913, il resto, finora ignoto, in alcune formule di quadratura. Ecco il primo:

Se d'una funzione fx si conoscono 4 valori fx_0, fx_1, fx_2, fx_3, si può calcolare, con procedimenti algebrici, la funzione gx, intera, di terzo grado, che per i 4 valori x_0, x_1, x_2, x_3 coincide con fx.

La teoria delle funzioni interpolanti dice che si ha, per un valore qualunque della variabile:

$$fx = gx + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(\mathrm{D}^4 fu)/4!$$

ove u è un valore medio fra x_0, x_1, x_2, x_3, x. Integrando si ha $\int fx\,\mathrm{d}x$ espresso per approssimazione da $\int gx\,\mathrm{d}x$, che ha la forma

$$\mathrm{A}_0 fx_0 + \mathrm{A}_1 fx_1 + \mathrm{A}_2 fx_2 + \mathrm{A}_3 fx_3,$$

ove gli A sono indipendenti da f. E si ha un resto

$$\int (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(\mathrm{D}^4 fu)/4!\,\mathrm{d}x.$$

La formula così detta di Simpson si può ottenere da questa, facendo $x_0 = -1$, $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$; il resto assumerà la forma

$$\int_{-1}^{+1} (x + 1)\,x^2(x - 1)(\mathrm{D}^4 fu)/4!\,\mathrm{d}x;$$

e siccome il fattore che moltiplica $\mathrm{D}^4 fu$ ha un segno costante, si può portare questo $\mathrm{D}^4 f$ fuori dell'integrale e si ottiene così il valor medio del resto.

Facendo invece i quattro valori della variabile eguali a 0, 1, 2, 3, e integrando fra 0 e 3, si ottiene la formula

$$\int_0^3 fx\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8}(f0 + 3f1 + 3f2 + f3) + \mathrm{R}f,$$

data da Newton nel 1711, e che è la prima di quelle di Cotes, 1722. Ma l'espressione precedente del resto, ottenuto colle funzioni interpolanti, contiene una lettera u, che è funzione incognita di x, ed il fattore che moltiplica $\mathrm{D}^4 fu$ cambia di segno entro i limiti d'integrazione. Si può riconoscere facilmente che se fosse $u = x$, non è permesso trasportare il $\mathrm{D}^4 f$ fuori dell'integrale. Ma essendo u funzione incognita, nulla si conchiude per questa via. La dott. Quarra, fatti i calcoli colla regola precedente, conchiuse che si può effettivamente portare il $\mathrm{D}^4 f$ fuori dell'integrale e si ha:

$$\mathrm{R}f = \frac{\mathrm{D}^4 fu}{4!}\int_0^3 x(x - 1)(x - 2)(x - 3)\,\mathrm{d}x = -\frac{9}{10}\frac{\mathrm{D}^4 fu}{4!}.$$

La funzione φ ha derivata nulla per tutti i valori della variabile differenti da zero, ove la funzione è discontinua ed ha il salto $+1$. Ivi, secondo la definizione comune, la funzione non ha derivata finita, e qui si arrestarono gli analisti. Ma gli elettricisti progredirono oltre; Maxwell, Heaviside, e più recentemente Giorgi [1] introdussero la « funzione impulsiva » che io indicherò con $\mathrm{U}x$, che è nulla per tutti i valori di x diversi da zero, ed è infinita per $x = 0$, in modo però che $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{U}x \, \mathrm{d}x = 1$. Si ha allora:

$$x \varepsilon \mathrm{q} \cdot \supset \cdot \varphi x = \int_{-\infty}^{x} (\mathrm{U}x) \, \mathrm{d}x .$$

Come in algebra, dopochè si è considerato il numero (intero), versione di arithmos di Euclide, si parla dei numeri razionali, che non sono dei numeri prima considerati, ma una categoria più ampia dei numeri; così « funzione impulsiva » non è una funzione, quali si definiscono in analisi, ma una categoria più ampia di enti.

La funzione $\frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{2} \operatorname{sign}(z-x)$, considerata nell'enunciato del teorema in principio di questa Nota, è una qualunque funzione la cui derivata d'ordine n è $\mathrm{U}(z-x)$.

Chimica fisica. — *Sopra una rappresentazione degli elementi chimici mediante punti nello spazio ordinario* [2]. Nota del Corrispondente Arnaldo Piutti.

Le rappresentazioni degli elementi chimici nel piano di due assi rettangolari xy per mezzo dei punti del piano stesso, essendo istituite mediante due sole proprietà semplici, numericamente valutate, oppure mediante quozienti di tali valutazioni, non consentono generalizzazioni molto estese.

Un passo notevole in tale direzione potrebbero fare senza alcun dubbio le nostre conoscenze se si utilizzassero metodi rappresentativi nei quali tutte le proprietà note degli elementi misurabili ed espresse mediante numeri, fossero prese in considerazione, ma ciò richiederebbe l'intervento di rappresentazioni con punti in spazii più ampî che non l'ordinario o per lo meno di varietà geometriche costruite su piani (se si vuole una rappresentazione grafica) o mediante modelli (se la si vuole nello spazio stesso), nel modo

[1] Ing. Gio. Giorgi, *Il metodo simbolico nello studio delle correnti variabili*, Associaz. Elettr. Italiana, 11 ottobre 1903.

[2] Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico-farmaceutico della R. Università di Napoli.