ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

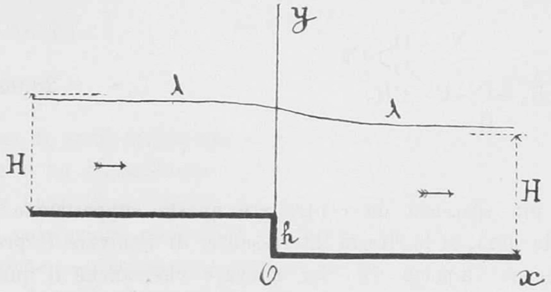
PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Meccanica. — *Corrente rapida con brusco salto sul fondo.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Questa Nota chiude una serie di questioni, di cui sto occupandomi da qualche tempo. Si tratta dell'influenza che hanno forme particolari del fondo di un canale, sull'andamento di una corrente rapida [1].

La forma particolare che intendo studiare ora è quella indicata in figura.



Come si vede il fondo presenta un salto brusco. L'appellativo *rapida*, attribuito alla corrente sta a significare nel caso attuale che la sua velocità assintotica c è abbastanza rilevante rispetto a $\sqrt{2gh}$ (h altezza del salto, g accelerazione della gravità) per cui del rapporto $\frac{\sqrt{2gh}}{c}$ sono trascurabili le potenze superiori alla prima. Allora la gravità non ha influenza sensibile sul moto della corrente [2] ed il problema può al solito, condursi alle quadrature. La valutazione di queste quadrature esige in generale l'impiego di trascendenti ellittiche, in modo piuttosto malagevole, e punto comodo per ricavare gli elementi più notevoli del fenomeno (forma del pelo libero λ). Diviene particolarmente spedita quando il salto è abbastanza piccolo. In modo preciso quando il rapporto $\frac{h}{H}$ (H è l'altezza assintotica del pelo libero sul fondo, sia a monte che a valle) può trattarsi come quantità di

[1] *Sull'intumescenza del pelo libero nei canali a fondo accidentato*, questi Rendiconti, vol. XXI, 5 maggio 1912, pp. 588-593; *Sulle onde superficiali dovute a particolare conformazione del fondo*, ibidem, 1 giugno 1912, pp. 704-708; *Onde brevi causate da accidentalità periodiche del fondo*, ibidem, 16 giugno 1912, pp. 760-764; *Intumescenze e depressioni che dislivelli del letto determinano in un canale scoverto*, ibidem, 6 aprile 1913, vol. XXII, pp. 417-422.

[2] Cfr. loc. cit.

primo ordine. Si hanno allora per il pelo libero λ le equazioni parametriche seguenti:

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} x = \dfrac{2H}{\pi}\left[\log\dfrac{1-\zeta}{1+\zeta} + \dfrac{h}{2H}\log\dfrac{8H}{h}\right], \\ y = H + h\left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\,\text{arc tg}\,\zeta\right] \\ \left(-1 \leq \zeta \leq 1 \quad \text{e} \quad -\dfrac{\pi}{4} \leq \text{arc tg}\,\zeta \leq \dfrac{\pi}{4}\right), \end{cases}$$

il sistema di riferimento essendo quello indicato in figura.

La linea λ ha un flesso sul livello medio $\left(\text{retta } y = H + \dfrac{h}{2}\right)$ spostato dalla soglia verso valle di $\dfrac{h}{\pi}\log\dfrac{8H}{h}$; essa è inoltre simmetrica rispetto a questo punto, dove presenta pure la massima inclinazione $\dfrac{1}{2}\dfrac{h}{H}$ sull'orizzonte.

1. Introduco, al solito, le componenti u e v della velocità, il potenziale di velocità φ, la funzione di corrente ψ e pongo

$$(1)\qquad x + iy = z \quad , \quad u - iv = w \quad , \quad \varphi + i\psi = f;$$

w ed f, funzioni di z, sono legate fra loro dalla relazione

$$(2)\qquad \frac{df}{dz} = w.$$

Assumo la velocità assintotica $c = 1$. Colle solite posizioni

$$(3)\qquad z = z(f) \quad , \quad f = iH + \frac{2H}{\pi}\log\frac{1-\zeta}{1+\zeta},$$

il campo del moto si può rappresentare conformemente nel semicerchio

$$|\zeta| = |\xi + i\eta| = |\sqrt{\xi^2 + \eta^2}| \leq 1 \quad , \quad \eta \geq 0 \ (^1).$$

Allora chiamando ζ_0 un punto della semicirconferenza $|\zeta| = 1$, $\eta > 0$, la seguente relazione è l'integrale generale che corrisponde ad un salto di ampiezza qualunque, nelle supposte circostanze [2]:

$$(4)\qquad w = \sqrt{\frac{(\zeta - i)(1 - \zeta_0\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)(1 - i\zeta)}}.$$

[1] Cfr. Colonnetti, *Sul moto di un liquido in un canale*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, 1911, tom. XXXII, pp. 51-87, § 6.

[2] Cfr. Cisotti, *Vene fluenti*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, 1908, tom. XXV, pag. 145, formula (37'), in cui si faccia: $n = 3$, $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = -\frac{\pi}{2}$, $\vartheta_3 = 0$; $\zeta_1 = \zeta_0$, $\zeta_2 = i$ e si tenga presente che $w = e^{-i\omega}$.

Tenendo conto di (2) e (3) e notando che a $z=0$ corrisponde $z=i$, si ha

$$z=\frac{4\mathrm{H}}{\pi}\int_{\zeta}^{i}\frac{d\zeta}{1-\zeta^2}\sqrt{\frac{(\zeta-\zeta_0)(1-i\zeta)}{(\zeta-i)(1-\zeta_0\zeta)}}\,; \tag{5}$$

relazione questa che definisce il punto z del piano del moto da coordinare ad un punto ζ del piano ausiliario. In tal modo le (4) e (5) risolvono il problema propostoci, qualunque sia l'ampiezza h del salto, che è legata a ζ_0 dalla formula seguente:

$$h=\frac{4\mathrm{H}}{i\pi}\int_{\zeta_0}^{i}\frac{d\zeta}{1-\zeta^2}\sqrt{\frac{(\zeta-\zeta_0)(1-i\xi)}{(\zeta-i)(1-\zeta_0\zeta)}}\,. \tag{6}$$

Gli integrali che compariscono nei secondi membri di (5) e (6) si possono esprimere mediante trascendenti ellittiche.

Mi limiterò ad assegnare la forma del pelo libero λ quando h è abbastanza piccolo rispetto ad H. Il calcolo degli integrali accennati conduce allora rapidamente ad espressioni definitive ed esaurienti.

2. Sia σ_0 l'argomento di ζ_0: si abbia cioè $\zeta_0=e^{i\sigma_0}$, e poniamo

$$\sigma_0=\frac{\pi}{2}-\varepsilon\,,$$

designando ε un numero di cui sono trascurabili le potenze superiori alla prima. Poichè per tale ipotesi è $\zeta_0=i+\varepsilon$, la (5) diviene

$$z=\frac{4\mathrm{H}}{\pi}\int_{\zeta}^{i}\frac{d\zeta}{1-\zeta^3}\left\{1+\frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon\zeta}{1-i\zeta}\right\}\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{\zeta-1}}\,,$$

che, integrata, porge

$$\begin{aligned} z=i\varepsilon\mathrm{H}+\frac{2\mathrm{H}}{\pi}\Bigg[\ &\log\frac{1+\frac{1}{4}\varepsilon(1-i)+\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{\zeta-i}}}{1+\frac{1}{4}\varepsilon(1-i)-\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{\zeta-i}}}-\\ &-\log\frac{1-\frac{1}{4}\varepsilon(1+i)+\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{\zeta-i}}}{1-\frac{1}{4}\varepsilon(1+i)-\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{\zeta-i}}}+\\ &+\frac{\varepsilon}{2}\log\frac{1-\frac{1}{4}i\varepsilon+\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{\zeta-i}}}{1-\frac{1}{4}i\varepsilon-\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{\zeta-i}}}\Bigg]. \end{aligned} \tag{7}$$

Equazioni parametriche del pelo libero λ. — Per far descrivere all'affissa z il pelo libero, bisogna che ζ percorra l'asse reale; precisamente quando ζ varia da 1 fino a -1 si descrive λ dall'infinito a monte fino all'infinito a valle. Se si nota che, essendo ζ reale e quindi $|\zeta - i| \geq 1$, si ha

$$\sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{\zeta - i}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\zeta - i} \quad (^1),$$

dalla (7), ponendo $z = x + iy$ e separando la parte reale dalla immaginaria si hanno, colla voluta approssimazione, le seguenti equazioni parametriche di λ:

$$(8) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2\mathrm{H}}{\pi}\left[\log\dfrac{1-\zeta}{1+\zeta} - \dfrac{\varepsilon}{2}\log\dfrac{\varepsilon}{8}\right], \\ y = \dfrac{1}{2}\varepsilon \mathrm{H} + \mathrm{H}\left[1 + \dfrac{2\varepsilon}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\zeta\right]. \end{cases}$$

Per esprimere la costante ε in funzione di h e di H, basta notare che per $\zeta = 1$ (che corrisponde al punto all'∞ a monte) dev'essere $y = \mathrm{H} + h$.

Dalla seconda di (8) scende allora

$$(9) \qquad \varepsilon = \frac{h}{\mathrm{H}}.$$

Dalle (8) si passa così, senz'altro, alle (I) sostituendo ad ε la sua espressione (9).

Dalla seconda di (I) scende che per $\zeta = -1$ (corrispondente al punto all'∞ a valle) è $y = \mathrm{H}$, come era evidente *a priori*.

Inclinazione del pelo libero. - Inclinazione massima. - Flesso. — L'angolo ϑ che la tangente al pelo libero in un generico suo punto forma coll'asse x, contato positivamente fra 0 e π nel verso $x \longrightarrow y$, è definito, mediante il parametro ζ nel modo seguente:

$$\vartheta = i \log w = \frac{i}{2}\log\frac{(\zeta - i)(1 - \zeta_0\zeta)}{(1 - i\varepsilon)(\zeta - \zeta_0)} \quad (-1 \leq \zeta \leq 1).$$

Poichè $\zeta_0 = i + \varepsilon = i + \dfrac{h}{\mathrm{H}}$ avremo colla solita approssimazione

$$\vartheta = \frac{h}{2\mathrm{H}}\left\{1 - \frac{2}{\zeta^2 + 1}\right\}.$$

Da queste apparisce che quando ζ varia da 1 fino a 0 ϑ decresce da 0

(1) Va da sè che, pur limitandosi ai termini di prim'ordine in ε un tale sviluppo non è legittimo in un campo che contenga il punto i.

fino a $-\frac{1}{2}\frac{h}{H}$, e quando ζ varia da 0 fino a -1 ϑ cresce da $-\frac{1}{2}\frac{h}{H}$ fino a 0. Per $\zeta = 0$ il pelo libero presenta dunque un flesso. Basta porre di conseguenza $\zeta = 0$ nelle (I) per averne le coordinate. Si ottiene

$$x = \frac{h}{\pi}\log\frac{8H}{h} \quad , \quad y = H + \frac{h}{2} .$$

Il punto di flesso si trova sul livello medio $\left(y = H + \frac{h}{2}\right)$ *spostato dalla soglia verso valle di* $\frac{h}{\pi}\log\frac{8H}{h}$.

Dalle equazioni parametriche (I) ovviamente si scorge che il pelo libero λ è simmetrico rispetto a questo punto.

Matematica. — *Sugli integrali doppii.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio C. Segre.

In una Nota pubblicata in questi stessi Rendiconti (aprile 1907) ho dimostrato nel caso più generale che, se $f(x, y)$ è una funzione definita in un qualsiasi campo σ del piano x, y, allora [1] vale la:

$$(1) \qquad \int_{(\sigma)} f(x, y)\, d\sigma = \int_{\sigma} dy \int f(x, y)\, dx$$

quando esiste il primo membro (e *per conseguenza* anche il secondo). Ho così dimostrato che *in ogni caso* un integrale superficiale si può (ammesso naturalmente che esista) trasformare in un integrale doppio. Sorge spontanea la domanda se sia vero il teorema reciproco; se cioè sia lecito scrivere la (1), quando soltanto si sappia *che esiste il secondo membro*, se cioè in ogni caso un integrale doppio sia uguale a un integrale superficiale. Questa domanda include in sè l'esame dei casi più importanti, in cui *è lecito invertire l'ordine delle integrazioni.*

Ad essa non mi è riuscito dare risposta, che supponendo nota *a priori* la misurabilità della $f(x, y)$ [2]. Per funzioni $f(x, y)$ non misurabili evidentemente la (1) non ha significato; e del resto la limitazione così posta

[1] Qui e nelle seguenti pagine è sempre sottinteso che un campo, a cui si estenda una integrazione, sia *misurabile e limitato.*

[2] Resta così ancora posta la domanda se una funzione $f(x, y)$ misurabile come funzione della x e misurabile come funzione della y sia anche superficialmente misurabile; o più semplicemente, se un gruppo di punti del piano (y, x), di cui sia misurabile l'intersezione con una parallela all'uno o all'altro degli assi coordinati, sia anche superficialmente misurabile.