ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

fino a $-\frac{1}{2}\frac{h}{H}$, e quando ζ varia da 0 fino a -1 ϑ cresce da $-\frac{1}{2}\frac{h}{H}$ fino a 0. Per $\zeta = 0$ il pelo libero presenta dunque un flesso. Basta porre di conseguenza $\zeta = 0$ nelle (I) per averne le coordinate. Si ottiene

$$x = \frac{h}{\pi} \log \frac{8H}{h} \quad , \quad y = H + \frac{h}{2} .$$

Il punto di flesso si trova sul livello medio $\left(y = H + \frac{h}{2}\right)$ *spostato dalla soglia verso valle di* $\frac{h}{\pi} \log \frac{8H}{h}$.

Dalle equazioni parametriche (I) ovviamente si scorge che il pelo libero λ è simmetrico rispetto a questo punto.

Matematica. — *Sugli integrali doppii.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio C. Segre.

In una Nota pubblicata in questi stessi Rendiconti (aprile 1907) ho dimostrato nel caso più generale che, se $f(x, y)$ è una funzione definita in un qualsiasi campo σ del piano x, y, allora [1] vale la:

$$(1) \qquad \int_{(\sigma)} f(x, y)\, d\sigma = \int_{\sigma} dy \int f(x, y)\, dx$$

quando esiste il primo membro (e *per conseguenza* anche il secondo). Ho così dimostrato che *in ogni caso* un integrale superficiale si può (ammesso naturalmente che esista) trasformare in un integrale doppio. Sorge spontanea la domanda se sia vero il teorema reciproco; se cioè sia lecito scrivere la (1), quando soltanto si sappia *che esiste il secondo membro*, se cioè in ogni caso un integrale doppio sia uguale a un integrale superficiale. Questa domanda include in sè l'esame dei casi più importanti, in cui *è lecito invertire l'ordine delle integrazioni.*

Ad essa non mi è riuscito dare risposta, che supponendo nota *a priori* la misurabilità della $f(x, y)$ [2]. Per funzioni $f(x, y)$ non misurabili evidentemente la (1) non ha significato; e del resto la limitazione così posta

[1] Qui e nelle seguenti pagine è sempre sottinteso che un campo, a cui si estenda una integrazione, sia *misurabile e limitato.*

[2] Resta così ancora posta la domanda se una funzione $f(x, y)$ misurabile come funzione della x e misurabile come funzione della y sia anche superficialmente misurabile; o più semplicemente, se un gruppo di punti del piano (y, x), di cui sia misurabile l'intersezione con una parallela all'uno o all'altro degli assi coordinati, sia anche superficialmente misurabile.

al nostro risultato non ha alcuna importanza per le applicazioni, perchè nessun algoritmo analitico può condurre a funzioni non misurabili.

Nel campo poi delle funzioni misurabili la risposta che si dà alla nostra domanda è così semplice e fors'anche notevole, che sono indotto a pubblicarla in questa Nota.

Consideriamo i due integrali, che figurano nella (1)

$$\int_\sigma f(x, y)\, d\sigma \tag{2}$$

$$\int_\sigma dy \int f(x, y)\, dx\,. \tag{3}$$

Il primo di essi gode di una proprietà (immediata conseguenza della definizione di integrali del Lebesgue), la quale, come vedremo con esempii, non è sempre goduta da (3), che si enuncia così: *Se esiste l'integrale* (2), *esiste anche l'integrale della* $f(x, y)$ *esteso a un qualsiasi* (*misurabile*) *gruppo di punti* σ' *subordinato di* σ. Questa proprietà costituisce appunto il nocciolo del nostro problema, come risulta dal seguente

Teorema. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'integrale doppio* $\int_\sigma dy \int f(x, y)\, dx$ *di una funzione misurabile* $f(x, y)$ *esteso a un campo limitato e misurabile* σ *si possa considerare come l'integrale superficiale* $\int_\sigma f\, d\sigma$ *della* f *esteso a* σ, *è che esista lo* $\int_\sigma dy \int f\, dx$ *esteso a un qualsiasi campo* (*misurabile*) σ' *parziale di* σ. *Cioè, allora e allora soltanto che è soddisfatta questa condizione*:

1°) *esiste l'integrale* $\int_\sigma f\, d\sigma$ *della* f *esteso a* σ, e quindi (per i risultati della mia Nota citata)

2°) *esiste anche l'altro integrale doppio* $\int_\sigma dx \int f(x, y)\, dy$;

3°) *l'integrale superficiale, e i due integrali doppii citati sono uguali tra di loro.* E quindi in particolare nel calcolo degli integrali doppii *si può invertire l'ordine delle integrazioni.*

Resta così completamente trattata la questione di sapere fino a qual punto sieno equivalenti i due concetti fondamentali del calcolo di « *integrali doppii* » e di « *integrali superficiali* ».

Daremo infine esempii di funzioni, per cui, pure esistendo un integrale doppio esteso a un campo σ, non esiste il corrispondente integrale superficiale, e i due integrali doppii non sono uguali fra loro.

È importante notare che la esistenza di $\int_\sigma dy \int f(x, y)\, dx$ porta di conseguenza l'esistenza dello stesso integrale esteso a un qualsiasi (misurabile) campo parziale σ' di σ in casi molto ampii: *quando p. es. la* $f(x, y)$ *è limitata*, od anche più generalmente *quando la* $f(x, y)$ *ha sempre lo stesso segno* (o tale diventa con l'aggiunta di una opportuna costante, ossia *quando la* $f(x, y)$ *è limitata in un verso*). Per tali funzioni dunque *la sola esistenza di* $\int_\sigma dy \int f(x, y)\, dx$ *basta perchè esista l'integrale superficiale* $\int_\sigma f\, d\sigma$ *e sia uguale al precedente integrale doppio, e perchè sia lecito nel calcolo di questo integrale invertire l'ordine delle integrazioni.*

Dimostriamo il teorema enunciato. Supponiamo esista

$$\int_\sigma dy \int f(x, y)\, dx$$

e che esista pure $\int dy \int f\, dx$ esteso a un qualsiasi campo subordinato σ'. Siano p, n i due gruppi di punti del campo σ, ove la $f(x, y)$ è rispettivamente non minore, oppure minore di zero. Siano σ_r, p_r, n_r l'insieme dei punti di σ, oppure di p, oppure di n, ove il valore assoluto di $f(x, y)$ non supera l'intero positivo r.

Con (p, y), (n, y), (p_r, y), ecc. intendiamo il gruppo dei punti comuni a una retta $y = \text{cost}$, e al gruppo p, oppure al gruppo n, oppure al gruppo p_r, ecc.

Dall'esistenza supposta di $\int_p dy \int f(x, y)\, dx$ (si ricordi che p è un gruppo di punti subordinato di σ) segue che per una retta generica $y = \text{cost}$ (cioè per ogni retta $y = \text{cost}$, escluso al più un aggregato di misura nulla di tali rette) esiste

$$\int_{(p, y)} f(x, y)\, dx = \lim_{r=\infty} \int_{(p_r, y)} f(x, y)\, dx \quad (^1). \tag{5}$$

Quindi:

$$\int_{(p)} dy \int f(x, y)\, dx = \int dy \int_{(p, y)} f(x, y)\, dx = \tag{6}$$
$$= \int \left[\lim_{r=\infty} \int_{(p_r, y)} f(x, y)\, dx \right] dy\,.$$

(1) Questa uguaglianza discende immediatamente dalla definizione di integrale del Lebesgue.

Poichè p_{r+1} contiene p_r, e la $f(x, y)$ è in p non negativa, lo

$$\int_{(p_r, y)} f(x, y)\, dx$$

è una funzione della x, che *non decresce* al crescere dell'indice r. Quindi nella (6) è invertibile il segno di integrale col segno di limite, cosicchè

$$(7) \qquad \int_{(p)} dy \int f(x, y)\, dx = \lim_{r=\infty} \int dy \int_{(p_r, y)} f(x, y)\, dx =$$

$$= \lim_{r=\infty} \int_{(p_r)} dy \int f(x, y)\, dx .$$

Poichè in p_r la $f(x, y)$ è limitata, per il teorema della mia Nota citata, l'integrale del 3° membro della (7) vale l'integrale superficiale $\int_{(p_r)} f(x, y)\, d\sigma$ della $f(x, y)$ esteso al gruppo p_r. Cosicchè:

$$(8) \qquad \int_{(p)} dy \int f(x, y)\, dx = \lim \int_{(p_r)} f(x, y)\, d\sigma$$

ossia, per definizione di integrale superficiale,

$$\int_{(p)} dy \int f(x, y)\, dx = \int_{(p)} f(x, y)\, d\sigma .$$

Una formula analoga si dimostra per gli integrali estesi al gruppo di punti n. Sommando, ed osservando che $p + n = \sigma$, si deduce il nostro teorema.

Osservazione. — Se noi senz'altro applicassimo allo stesso campo σ le considerazioni testè svolte per il gruppo p, vedremmo che per dimostrare la

$$\int_{(\sigma)} f(x, y)\, d\sigma = \int_{\sigma} dy \int f(x, y)\, dx$$

nell'*ipotesi che esista il secondo membro*, basta provare che

$$\lim_{r=\infty} \int dy \int_{(\sigma_r, y)} f(x, y)\, dx = \int \left[\lim_{r=\infty} \int_{(\sigma_r, y)} f(x, y)\, dx \right] dy$$

nell'*ipotesi che esista il secondo membro*. Siamo così ridotti ad un problema di invertibilità dei segni di integrale e di limite, cioè a un problema identico al problema dell'integrazione per serie, che ha avuto una trattazione completa per opera del Lebesgue, di B. Levi, di G. Vitali.

Può essere interessante il notare con esempii come possa esistere l'integrale doppio $\int_\sigma dy \int f(x, y)\, dx$ esteso a un campo σ senza che esistano gli integrali analoghi estesi ai campi parziali, e quindi senza che esista il corrispondente integrale superficiale $\int_\sigma f(x, y)\, d\sigma$. Proveremo pure che in tale caso non è generalmente lecito invertire l'ordine delle integrazioni. Questi esempii serviranno anzi a porre in giusta luce il nostro risultato.

Sia σ un rettangolo con i lati paralleli agli assi coordinati; dividiamo un lato g parallelo all'asse delle x in infiniti segmentini $g_1, g_2, g_3, \ldots$; il primo dei quali sia la metà di g, e ciascuno dei segmenti g_r sia contiguo al precedente g_{r-1} ed abbia una lunghezza uguale alla metà di quella di g_{r-1}. Dividiamo corrispondentemente ogni corda di σ parallela a g. Indichiamo con g_r anche la lunghezza di g_r; e con

$$\psi(y) = \psi_1(y) + \psi_2(y) + \psi_3(y) + \cdots$$

una serie convergente ma non integrabile termine a termine, pure essendo le $\psi(y)$, $\psi_r(y)$ funzioni integrabili definite per i valori di y corrispondenti a punti di σ.

Costruiamo in σ una funzione $f(x, y)$ con questa legge. In un punto di σ, la cui proiezione su g cade entro g_r, il valore della $f(x, y)$ sia $\frac{1}{g_r}\psi_r(y)$; il valore di $f(x, y)$ in un punto di σ, la cui proiezione su g separi due segmenti consecutivi g_{r-1}, g_r sia arbitrario. In altre parole $f(x, y)$ valga $\frac{1}{g_i}\psi_i(y)$ dentro il rettangolo h_i avente per base il segmento g_i, e per altezza l'altezza di σ.

Si trova facilmente:

$$(9)\qquad \begin{aligned} &\int_{(\sigma, y)} f(x, y)\, dx = \psi_1(y) + \psi_2(y) + \cdots = \psi(y) \\ &\int dy \int_{(\sigma, y)} f\, dx = \int \{\psi_1(y) + \psi_2(y) + \cdots\}\, dy = \int \psi(y)\, dy \end{aligned}$$

$$(10)\qquad \begin{aligned} \int_\sigma f(x, y)\, d\sigma &= \lim_{r=\infty} \int_{(h_1 + h_2 + \cdots + h_r)} f(x, y)\, d\sigma = \\ &= \lim_{r=\infty} \sum_1^r \int dy \int_{g_i} f(x, y)\, dx = \lim_{r=\infty} \sum_1^r \int \psi_i(y)\, dy. \end{aligned}$$

La (10) si può scrivere *soltanto ammettendo che ne esista il primo membro*. E similmente si trova

$$\int_{(\sigma, x)} f(x, y)\, dy = \frac{1}{g_i} \int \psi_i(y)\, dy$$

ammesso che il valore costante dato alla x appartenga al segmento g_i. Se ne deduce

$$\int_\sigma dx \int_{(\sigma, x)} f(x, y)\, dy = \sum_1^\infty \int \psi_i(y)\, dy\,, \tag{11}$$

ammesso che il primo membro esista.

Ora dalle nostre ipotesi segue che, pure esistendo il secondo membro di (9), possono non esistere i secondi membri di (10), (11); i quali, pure esistendo, possono essere distinti da quello.

Può dunque benissimo avvenire che non sia lecito invertire l'ordine delle integrazioni, od anche senz'altro che non esista l'integrale superficiale della $f(x, y)$.

Matematica. — *Coppie di superficie coniugate in deformazione.* Nota di Mauro Picone, presentata dal Socio L. Bianchi.

1. Il Bianchi [1] dice che due superficie S e S_1 sono *coniugate in deformazione* quando è possibile porre tra i loro punti una tal corrispondenza che ad ogni sistema di linee asintotiche attuali o virtuali sull'una corrisponda sull'altra un sistema di linee parimente asintotiche attuali o virtuali.

I due problemi di deformare la superficie S ovvero la S_1 sono da riguardarsi come intrinsecamente equivalenti, onde l'interesse di risolvere il seguente problema posto dal Bianchi:

Determinare le coppie di ds^2 che possono appartenere a coppie di superficie coniugate in deformazione [2].

Questo problema è stato completamente risoluto dal Bianchi e dal Servant [3], ed eccone la soluzione:

Se una superficie ne ammette un'altra coniugata in deformazione o essa (o la sua coniugata) è applicabile sopra una falda dell'evoluta di una superficie a curvatura costante positiva o sopra la più generale quadrica.

A questo teorema si è giunti per due diversi procedimenti analitici; quello usato dal Bianchi nella Nota citata è limitato al caso in cui i ds^2

[1] Bianchi, *Sopra un problema relativo alla teoria della deformazione delle superficie*, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, tom. XI, 1° sem. 1902; e *Lezioni di geometria differenziale*, vol. III, §§ 68 e seg.

[2] Sottintendiamo sempre le due superficie non ottenibili l'una dall'altra per una omotetia, poichè, com'è ovvio, due superficie omotetiche son sempre coniugate in deformazione.

[3] Bianchi, (N. c.); Servant, *Sur la deformation des surfaces*, Comptes Rendus, tom. 136, 1° sem. 1903.