ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

ammesso che il valore costante dato alla x appartenga al segmento g_i. Se ne deduce

$$(11)\qquad \int_\sigma dx \int_{(\sigma, x)} f(x \cdot y)\, dy = \sum_1^\infty \int \psi_i(y)\, dy\,,$$

ammesso che il primo membro esista.

Ora dalle nostre ipotesi segue che, pure esistendo il secondo membro di (9), possono non esistere i secondi membri di (10), (11); i quali, pure esistendo, possono essere distinti da quello.

Può dunque benissimo avvenire che non sia lecito invertire l'ordine delle integrazioni, od anche senz'altro che non esista l'integrale superficiale della $f(x, y)$.

Matematica. — *Coppie di superficie coniugate in deformazione.* Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI.

1. Il Bianchi [1] dice che due superficie S e S_1 sono *coniugate in deformazione* quando è possibile porre tra i loro punti una tal corrispondenza che ad ogni sistema di linee asintotiche attuali o virtuali sull'una corrisponda sull'altra un sistema di linee parimente asintotiche attuali o virtuali.

I due problemi di deformare la superficie S ovvero la S_1 sono da riguardarsi come intrinsecamente equivalenti, onde l'interesse di risolvere il seguente problema posto dal Bianchi:

Determinare le coppie di ds^2 che possono appartenere a coppie di superficie coniugate in deformazione [2].

Questo problema è stato completamente risoluto dal Bianchi e dal Servant [3], ed eccone la soluzione:

Se una superficie ne ammette un'altra coniugata in deformazione o essa (o la sua coniugata) è applicabile sopra una falda dell'evoluta di una superficie a curvatura costante positiva o sopra la più generale quadrica.

A questo teorema si è giunti per due diversi procedimenti analitici; quello usato dal Bianchi nella Nota citata è limitato al caso in cui i ds^2

[1] Bianchi, *Sopra un problema relativo alla teoria della deformazione delle superficie*, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, tom. XI, 1° sem. 1902; e *Lezioni di geometria differenziale*, vol. III, §§ 68 e seg.

[2] Sottintendiamo sempre le due superficie non ottenibili l'una dall'altra per una omotetia, poichè, com'è ovvio, due superficie omotetiche son sempre coniugate in deformazione.

[3] Bianchi, (N. c.); Servant, *Sur la deformation des surfaces*, Comptes Rendus, tom. 136, 1° sem. 1903.

appartengono a superficie di rotazione, quello seguito dal Servant al caso in cui i ds^2 non appartengono a superficie di rotazione. Inoltre nella breve Nota del Servant non è esposta la parte della ricerca che più interessa di esaminare a fondo, l'integrazione cioè dell'equazione differenziale a cui egli riduce il problema.

Credo utile perciò pubblicare questa breve Nota in cui ritrovo insieme i risultati del Bianchi e del Servant, accuratamente esponendo l'*immediata* completa integrazione dell'equazione differenziale nella quale traduco il problema di Bianchi.

2. Se gli elementi lineari ds^2 e ds_1^2 appartengono a coppie di superficie coniugate in deformazione, indicandone con $-\frac{1}{\varrho^2}$ e $-\frac{1}{\varrho_1^2}$ le rispettive curvatura e con $\left\{\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right\}_1$ i rispettivi simboli di Christoffel, devono verificarsi (ved. Bianchi, loc. cit.) le seguenti relazioni, *necessarie e sufficienti*,

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left\{\begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix}\right\}_1 , \quad \left\{\begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix}\right\}_1 , \\
&\left\{\begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix}\right\}_1 - 2\left\{\begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix}\right\}_1 , \quad \left\{\begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix}\right\}_1 - 2\left\{\begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix}\right\}_1 , \\
&\frac{\partial \log \varrho}{\partial u} - 2\left\{\begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix}\right\} = \frac{\partial \log \varrho_1}{\partial u} - 2\left\{\begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix}\right\}_1 , \\
&\frac{\partial \log \varrho}{\partial v} - 2\left\{\begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix}\right\} = \frac{\partial \log \varrho_1}{\partial v} - 2\left\{\begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix}\right\}_1 .
\end{aligned}
\right.
$$

Dalle prime quattro equazioni si deduce che nella corrispondenza fra le due superficie si corrispondono le geodetiche, si potrà dunque [1] porre:

$$ds^2 = \{\alpha(u) - \beta(v)\}\,(du^2 + dv^2),$$

$$ds_1^2 = \left\{ \frac{1}{\beta(v)+c} - \frac{1}{\alpha(u)+c} \right\} \left\{ \frac{du^2}{\alpha(u)+c} + \frac{dv^2}{\beta(v)+c} \right\},$$

c designando una costante arbitraria. Assunti ds^2 e ds_1^2 sotto questa forma riescono sempre soddisfatte le prime quattro delle relazioni (1), si tratta dunque di determinare $\alpha(u)$ e $\beta(v)$ in modo che riescano altresì soddisfatte le ultime due:

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\varrho}{\varrho_1} = 2\left\{\begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix}\right\}_1 , \\
&\frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\varrho}{\varrho_1} = 2\left\{\begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix}\right\}_1 .
\end{aligned}
\right.
$$

[1] Dini, *Sopra un problema della rappresentazione geografica di una superficie sopra un'altra*, Annali di Matematica, tom. III, 1869; Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, tom. III, cap. III.

Ma si ha

$$2\left\{ {12 \atop 2} \right\} - 2\left\{ {12 \atop 2} \right\}_1 = \frac{d}{du}\log(\alpha + c)\ ,\ 2\left\{ {12 \atop 1} \right\} - 2\left\{ {12 \atop 1} \right\}_1 = \frac{d}{dv}\log(\beta + c),$$

per cui le (2) equivalgono alla seguente unica relazione

$$\frac{1}{\varrho_1^2} = \frac{m(\alpha + c)^2 (\beta + c)^2}{\varrho^2}, \tag{3}$$

dove m designa una costante arbitraria. Poniamo

$$\alpha + c = a^2 \quad , \quad \beta + c = b^2 ,$$

si avrà

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{(aa'' - a'^2)\,a^2 + (bb'' - b'^2)\,b^2 - (aa'' + a'^2)\,b^2 - (bb'' + b'^2)\,a^2}{(a^2 - b^2)^3}$$

$$\frac{1}{\varrho_1^2} = a^3 b^3 \frac{(ba'' - ab'')\,(a^2 - b^2) - 2ab(a'^2 + b'^2)}{(a^2 - b^2)^3},$$

e la (3), se poniamo

$$a^2 a''(1 - ma^2) - aa'^2(2 - ma^2) = \mathrm{A}_1 \ , \ b^2 b''(1 - mb^2) - bb'^2(2 - mb^2) = \mathrm{B}_1 ,$$

$$- a''(1 - ma^2) + maa'^2 = \mathrm{A}_2 \ , \qquad - b''(1 - mb^2) + mbb'^2 = \mathrm{B}_2 ,$$

si traduce nella seguente equazione differenziale fra a e b:

$$\mathrm{A}_1 b + \mathrm{A}_2 b^3 + a\mathrm{B}_1 + a^3 \mathrm{B}_2 = 0 , \tag{4}$$

che si tratta di integrare.

Conviene ora esaminare separatamente il caso in cui il ds^2 appartiene ad una superficie di rotazione dall'altro in cui non vi appartiene.

3. *Caso delle superficie di rotazione.* — Si potrà supporre $b^2 = \text{cost.} = 1$, risulterà $\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_2 = 0$, e si deve ricavare a dalla seguente equazione differenziale

$$\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 = 0 ,$$

che si scrive

$$aa''(a^2 - 1)\,(1 - ma^2) = aa'^2(2 - m - ma^2),$$

od anche

$$\frac{a''}{a'} = \frac{2aa'}{a^2 - 1} + \frac{maa'}{1 - ma^2} ,$$

da cui integrando si trae

$$\frac{du}{da} = c\,\frac{\sqrt{1 - ma^2}}{a^2 - 1} .$$

Si ha pertanto

$$ds^2 = c^2 \frac{1 - ma^2}{a^2 - 1} da^2 + (a^2 - 1)\, dv^2,$$

$$ds_1^2 = c^2 \frac{1 - ma^2}{a^4(a^2 - 1)} da^2 + \frac{a^2 - 1}{a^2} dv^2,$$

e ponendo $a^2 - 1 = r^2$, $1 - \frac{1}{a^2} = r_1^2$,

$$ds^2 = c^2\left(\frac{1}{1 + r^2} - m\right) dr^2 + r^2\, dv^2,$$

$$ds_1^2 = c^2\left(1 - \frac{m}{1 - r_1^2}\right) dr_1^2 + r_1^2\, dv^2.$$

È il risultato del Bianchi. Per $m = 1$ e c puramente immaginaria il primo degli elementi lineari scritti appartiene ad una falda dell'evoluta di una superficie a curvatura costante positiva $-\frac{1}{c^2}$; per $m \neq 1$ entrambi i ds^2 scritti appartengono a quadriche di rotazione [1].

4. *Caso in cui le due superficie non sono di rotazione.* — Si dovrà allora cercare di soddisfare alla (4) con due funzioni $a(u)$ e $b(v)$, nessuna delle due costanti. Se b non è costante sarà possibile scegliere due valori v_1 e v_2 della v per modo che risulti $b^2(v_1) \neq b^2(v_2)$. Scriviamo la (4) per ciascuno dei due indicati valori della v, lasciando la u affatto variabile, verremo così a scrivere due equazioni lineari e distinte a coefficienti costanti a cui soddisfano le funzioni A_1, A_2, a, a^3, equazioni che, potendosi risolvere rispetto alle A_1 e A_2, daranno

$$(5) \qquad \begin{cases} A_1 = c_{11}\, a + c_{12}\, a^3, \\ A_2 = c_{21}\, a + c_{22}\, a^3, \end{cases}$$

dove le c_{ik} designano delle costanti. Introduciamo le espressioni (5) delle A_1, A_2 nella (4) e ordiniamo rispetto alle potenze a, a^3; la (4) così scritta, se non risultasse nullo ciascun coefficiente nel detto ordinamento, esprimerebbe per ogni valore di v una relazione lineare a coefficienti costanti fra le funzioni a, a^3, circostanza questa che non può aver luogo per a diversa da una costante. Segue da ciò che, come la funzione $a(u)$ deve soddisfare alle due equazioni (5), così la $b(v)$ deve soddisfare alle seguenti due:

$$(6) \qquad \begin{cases} B_1 = -c_{11}\, b - c_{21}\, b^3, \\ B_2 = -c_{12}\, b - c_{22}\, b^3. \end{cases}$$

[1] Per $m = 1$ e c reale (positiva) il ds_1^2 appartiene al *catenoide* di parametro c, ma il ds^2 ad una superficie immaginaria. Per un esauriente esame delle ulteriori circostanze geometriche cfr. la N. c. del Bianchi.

Dopo ciò tutto è ricondotto alla ricerca di tali valori per le costanti c_{ik} (fino ad ora indeterminate) che ciascuno dei sistemi (5) e (6) ammetta una soluzione, nella rispettiva funzione incognita, diversa da una costante.

Ora, sommando le due equazioni del sistema (5) dopo aver diviso la prima e moltiplicato la seconda per a, si deduce

$$(7)\qquad 2a'^2(ma^2-1)=c_{11}+(c_{12}+c_{21})\,a^2+c_{22}\,a^4\,,$$

equazione che definisce a. La funzione a definita dalla (7) soddisfa alla equazione

$$A_2=\frac{c_{12}+c_{21}}{2}\,a+c_{22}a^3\,,$$

ottenuta da quella derivando e dividendo per a' (diversa da zero); per cui affinchè essa a soddisfi alle (5) occorre e basta che sia

$$(8)\qquad c_{12}=c_{21}\,,$$

rimanendo c_{11} e c_{22} affatto arbitrarie. Valendo la (8) si ha altresì che la funzione b definita dall'equazione

$$2b'^2(mb^2-1)=-c_{11}-(c_{12}+c_{21})\,b^2-c_{22}b^4\,,$$

soddisfa alle (6).

Si avranno pertanto le seguenti espressioni per la più generale coppia di ds^2 coniugati in deformazione, non appartenenti a superficie di rotazione,

$$ds^2=2(a^2-b^2)\left\{\frac{(ma^2-1)\,da^2}{c_0+c_1a^2+c_2a^4}+\frac{(1-mb^2)\,db^2}{c_0+c_1b^2+c_2b^4}\right\},$$

$$ds_1^2=2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\left\{\frac{(ma^2-1)\,da^2}{a^2(c_0+c_1a^2+c_2a^4)}+\frac{(1-mb^2)\,db^2}{b^2(c_0+c_1b+c_2b^4)}\right\},$$

$c_0\,,\,c_1\,,\,c_2$ designando costanti arbitrarie. Si può a meno di omotetie supporre $m=1$ e trascurare i fattori costanti per cui risultano moltiplicati i due ds^2, se, ciò sottinteso, si pone

$$a^2=\xi\,,\ b^2=\eta\ \ ;\ \ \frac{1}{a^2}=\xi_1\,,\ \frac{1}{b^2}=\eta_1\,,$$

si avranno le seguenti espressioni per gli ottenuti ds^2:

$$(a)\qquad ds^2=(\xi-\eta)\left\{\frac{(\xi-1)\,d\xi^2}{c_0\xi+c_1\xi^2+c_2\xi^3}+\frac{(1-\eta)\,d\eta^2}{c_0\eta+c_1\eta^2+c_2\eta^3}\right\},$$

$$(b)\qquad ds_1^2=(\xi_1-\eta_1)\left\{\frac{(\xi_1-1)\,d\xi_1^2}{c_2\xi_1+c_1\xi_1^2+c_0\xi_1^3}+\frac{(1-\eta_1)\,d\eta_1^2}{c_2\eta_1+c_1\eta_1^2+c_0\eta_1^3}\right\}$$

entrambi appartenenti alla più generale quadrica. È il risultato del Servant.

Per quanto riguarda le relazioni geometriche tra le due quadriche coniugate in deformazione, aventi gli elementi lineari dati dalle (a) e (b), vedasi la Nota del Bianchi: *Sulle quadriche coniugate in deformazione* [1] nella quale, indipendentemente dai risultati del Servant, trovansi determinate tutte le coppie di quadriche coniugate in deformazione.

Matematica. — *Osservazioni sulle funzioni continue.* Nota di Gustavo Sannia, presentata dal Socio E. D'Ovidio.

Consideriamo una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo (finito o infinito) I, i cui valori esauriscano un intervallo (finito o infinito) J, il quale faccia parte del campo di esistenza di un'altra funzione $z = g(y)$; sicchè si possa anche considerare z come funzione (di funzione) di x in I:

$$z = g(f(x)) = \mathrm{F}(x).$$

Come è noto, se $f(x)$ e $g(y)$ sono continue in I ed J, anche $\mathrm{F}(x)$ è continua in I. Ora è naturale ed utile il domandarsi se, ammessa la continuità per altre due, g ed F o f ed F, delle tre funzioni f, g ed F, ne segua ancora necessariamente la continuità per la terza f o g.

Si vede subito che: *a) se* $\mathrm{F}(x)$ *è continua in* I *e* $g(y)$ *è continua in* J, $f(x)$ *non è necessariamente continua in* I [2].

Dimostreremo invece che: *b) se* $f(x)$ *ed* $\mathrm{F}(x)$ *sono continue in* I, *anche* $g(y)$ *è continua in* J.

Premettiamo un lemma.

Sia $y = f(x)$ *una funzione continua in* I *e* γ *un punto interno in senso stretto all'intervallo* J *formato dai suoi valori. Fra tutti i punti di* I *ove* $f(x)$ *assume il valore* γ *ve n'è sempre almeno uno* c' *in un intorno (almeno sinistro o destro) del quale i valori assunti da* $f(x)$ *sono tutti minori di* γ, *e ve n'è sempre almeno uno* c'' *in un intorno (almeno sinistro o destro) del quale i valori assunti da* $f(x)$ *sono tutti maggiori di* γ.

[1] Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, tom. XII, 1° sem. 1903.

[2] Valga un esempio. La funzione

$$y = f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{per} \quad x \neq 0 \,,\; f(0) = 0$$

è discontinua in $\mathrm{I} = (-\infty, +\infty)$ ed ivi assume tutti i valori di $\mathrm{J} = (0, +\infty)$. In J (e fuori di J) è continua la funzione $g(y) = ye^{-y}$, ed è pure continua in I la funzione composta:

$$\mathrm{F}(x) = g(f(x)) = \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{per} \quad x \neq 0 \,,\; \mathrm{F}(0) = 0 .$$