ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Per quanto riguarda le relazioni geometriche tra le due quadriche coniugate in deformazione, aventi gli elementi lineari dati dalle (a) e (b), vedasi la Nota del Bianchi: *Sulle quadriche coniugate in deformazione* [1] nella quale, indipendentemente dai risultati del Servant, trovansi determinate tutte le coppie di quadriche coniugate in deformazione.

Matematica. — *Osservazioni sulle funzioni continue.* Nota di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio E. D'OVIDIO.

Consideriamo una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo (finito o infinito) I, i cui valori esauriscano un intervallo (finito o infinito) J, il quale faccia parte del campo di esistenza di un'altra funzione $z = g(y)$; sicchè si possa anche considerare z come funzione (di funzione) di x in I:

$$z = g(f(x)) = \mathrm{F}(x) .$$

Come è noto, se $f(x)$ e $g(y)$ sono continue in I ed J, anche $\mathrm{F}(x)$ è continua in I. Ora è naturale ed utile il domandarsi se, ammessa la continuità per altre due, g ed F o f ed F, delle tre funzioni f, g ed F, ne segua ancora necessariamente la continuità per la terza f o g.

Si vede subito che: *a) se* $\mathrm{F}(x)$ *è continua in* I *e* $g(y)$ *è continua in* J, $f(x)$ *non è necessariamente continua in* I [2].

Dimostreremo invece che: *b) se* $f(x)$ *ed* $\mathrm{F}(x)$ *sono continue in* I, *anche* $g(y)$ *è continua in* J.

Premettiamo un lemma.

Sia $y = f(x)$ *una funzione continua in* I *e* γ *un punto interno in senso stretto all'intervallo* J *formato dai suoi valori. Fra tutti i punti di* I *ove* $f(x)$ *assume il valore* γ *ve n'è sempre almeno uno* c' *in un intorno (almeno sinistro o destro) del quale i valori assunti da* $f(x)$ *sono tutti minori di* γ, *e ve n'è sempre almeno uno* c'' *in un intorno (almeno sinistro o destro) del quale i valori assunti da* $f(x)$ *sono tutti maggiori di* γ.

(1) Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, tom. XII, 1° sem. 1903.

(2) Valga un esempio. La funzione

$$y = f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{per} \quad x \neq 0 \;,\; f(0) = 0$$

è discontinua in $\mathrm{I} = (-\infty, +\infty)$ ed ivi assume tutti i valori di $\mathrm{J} = (0, +\infty)$. In J (e fuori di J) è continua la funzione $g(y) = ye^{-y}$, ed è pure continua in I la funzione composta:

$$\mathrm{F}(x) = g(f(x)) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{per} \quad x \neq 0 \;,\; \mathrm{F}(0) = 0 .$$

Che se poi J *è finito superiormente* (*inferiormente*) *e* γ *è il suo estremo superiore* (*inferiore*), *esisterà il solo punto* c' (c'').

Supponiamo che γ sia interno ad J in senso stretto o ne sia l'estremo superiore (se J è finito superiormente), e consideriamo un valore qualsiasi γ_1 di J minore di γ. Esisteranno certamente in I almeno due punti c_1 e c dove $f(x)$ assumerà rispettivamente i valori γ_1 e γ: per fissare le idee supponiamo $c_1 < c$. La $f(x)$ potrà ancora assumere il valore γ in un numero finito o infinito di valori dell'intervallo (c_1, c), oltre che nell'estremo c: ma in ogni caso questi valori ammetteranno un minimo c'; perchè, se essi sono in numero infinito e c' è il loro limite inferiore, in c' la funzione continua $f(x)$ assumerà ancora il valore γ.

È questo il punto c' di cui si parla nell'enunciato. Infatti nel suo intorno sinistro (c_1, c') la $f(x)$ non assume mai il valore γ, tranne che in c', e quindi non vi assume neppure valori maggiori di γ, perchè in c_1 assume un valore minore γ_1.

Analogamente si dimostra l'esistenza del punto c'', se γ è interno ad J in senso stretto e ne è l'estremo inferiore (se J è finito inferiormente). Quel che più importa notare è che, se γ è interno ad J in senso stretto, i punti c' e c'' esistono entrambi. (Possono anche coincidere, ed allora $f(x)$ è crescente o decrescente nel punto $c' = c''$).

Ciò premesso, supponiamo, giusta l'enunciato *b*), che $f(x)$ ed $F(x)$ siano continue in I. Consideriamo un valore qualunque γ di J e la corrispondente coppia di punti c' e c'' or ora definita per la funzione $f(x)$. Se γ non è estremo superiore di J, esisterà il punto c' ed in un suo intorno (per esempio) sinistro la funzione $y = f(x)$ assumerà valori tutti minori di γ, anzi questi valori *esauriranno tutto un interno sinistro di* γ. A sinisira di c' è pure continua $F(x)$, quindi dato un numero positivo ε, risulterà, per tutti i punti di un intorno sinistro di c',

$$|F(x) - F(c')| = |g(f(x)) - g(f(c'))| < \varepsilon,$$

quindi

$$|g(y) - g(\gamma)| < \varepsilon \tag{1}$$

per tutti i corrispondenti valori y di $f(x)$. Or restringendo (se occorre) quell'intorno, i detti valori y finiranno per esaurire tutto un intorno sinistro di γ; dunque la (1) prova che $g(y)$ è continua a sinistra di γ. Analogamente si prova, adoperando il punto c'', che $g(y)$ è continua a destra di γ, se γ non è estremo superiore di J; ne segue che $g(y)$ è continua in γ, se γ è interno ad J in senso stretto.

All'enunciato *b*) si può anche dare la forma seguente: *se da una funzione* $F(x)$, *continua in un intervallo* I, *si elimina la variabile* x *col porre* $y = f(x)$, *ove* $f(x)$ *è una funzione continua in* I, *il risultato* $g(y)$

dell'eliminazione (supposta possibile) sarà funzione continua in ogni intervallo J *appartenente al campo dei valori assunti da* $f(x)$ *in* I.

In particolare: *se la funzione* $y = f(x)$ *continua in* I, *ammette una funzione inversa* $x = g(y)$ *in* J, *questa è continua in* J.

Poichè $F(x) = g(f(x)) = x$ è continua in I.

Il teorema *b*) si può estendere al caso in cui y sia funzione di più variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ nel campo rettangolare C costituito dagli intervalli $I_1, I_2, \dots, I_n$ ed ivi essa prenda tutti i valori di un intervallo J: se $y = f(x_1, \dots, x_n)$ *ed* $F(x_1, \dots, x_n) = g(f(x_1, \dots, x_n))$ *sono continue in* C, *anche* $g(y)$ *è continua in* J.

Sia infatti γ un valore di J (non estremo inferiore) e γ' un altro valore di J minore di γ; siano inoltre $(c_1, \dots, c_n)$ e $(c'_1, \dots, c'_n)$ due punti di C, certamente esistenti, ove $f(x_1, \dots, x_n)$ prenda rispettivamente i valori γ e γ'. Posto $c_i - c'_i = d_i$, il punto

$$x_i = c'_i + td_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

appartiene al campo C per tutti i valori di t nell'intervallo $T = (0, 1)$, quindi risultano ben definite nell'intervallo T le funzioni di t

$$f(c'_1 + td_1, \dots, c'_n + td_n) = \varphi(t)$$
$$g(f(c'_1 + td_1, \dots, c'_n + td_n)) = g(\varphi(t))$$

ed ivi sono continue. Inoltre la prima $\varphi(t)$ prende in T tutti i valori dell'intervallo (γ', γ), estremi inclusi (rispettivamente per $t = 0$ e $t = 1$). Ne segue, pel teorema *b*), che $g(\varphi(t))$ è anche funzione continua della variabile $y = \varphi(t)$ nell'intervallo (γ', γ) e quindi, in particolare, che essa è continua a sinistra di γ. Analogamente si proverebbe che essa è continua a destra di γ, se γ non è estremo superiore di J.

Meccanica. — *Sul moto di un punto attratto da più centri fissi*. Nota del dott. G. ARMELLINI, presentata dal Corrisp. E. ALMANSI.

Matematica. — *Un teorema di Paolo Ruffini sulla « Teoria delle sostituzioni »*. Nota di ETTORE BORTOLOTTI, presentata dal Socio E. BIANCHI.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.