ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Matematica. — *Sopra un nuovo aspetto della formula integrale di Fourier.* Nota del dott. Luciano Orlando, presentata dal Corrispondente A. Di Legge.

In un manoscritto inedito dell'ing. G. Giorgi e della sig.na L. Pisati [1] è contenuto un metodo molto intuitivo per giungere alla formula integrale di Fourier. Consideriamo la nota relazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y\lambda^2}\, d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{y}}\,.$$

In base a questa, se $\varphi(o)$ rappresenta una costante, possiamo subito scrivere

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(o)\, e^{-y\lambda^2}\, d\lambda = \varphi(o) \sqrt{\frac{\pi}{y}}\,.$$

Ora consideriamo l'integrale

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, e^{-y\lambda^2}\, d\lambda\,,$$

e l'espressione $\mathrm{I}\sqrt{y} - \varphi(o)\sqrt{\pi}$; quest'espressione vale

$$\sqrt{y} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(\lambda) - \varphi(o)]\, e^{-y\lambda^2}\, d\lambda,$$

cioè anche

$$\sqrt{y} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [\varphi(\lambda) - \varphi(o)]\, e^{-y\lambda^2}\, d\lambda + \sqrt{y} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} [\varphi(\lambda) - \varphi(o)]\, e^{-y\lambda^2}\, d\lambda +$$
$$+ \sqrt{y} \int_{\varepsilon}^{\infty} [\varphi(\lambda) - \varphi(o)]\, e^{-y\lambda^2}\, d\lambda.$$

Con larghissime condizioni relative a $\varphi(\lambda)$ per $\lambda = \pm\infty$, i due ultimi termini sono infinitesimi per $y = \infty$. Circa il primo termine, supponendo la continuità di $\varphi(\lambda)$ per $\lambda = 0$, si può scrivere la seguente relazione

$$\left| \sqrt{y} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [\varphi(\lambda) - \varphi(o)]\, e^{-y\lambda^2}\, d\lambda \right| < \eta \sqrt{y} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-y\lambda^2}\, d\lambda < \eta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\,,$$

cioè $< \eta\sqrt{\pi}$, dove η è infinitesimo per λ infinitesimo.

[1] I lavori che la sig.na Laura Pisati potè comporre nella breve sua vita hanno un'impronta di generalità grandissima, quasi mistica. « Da chiuso morbo combattuta e vinta », ella non ebbe tempo di affermare in modo più accessibile la potenza del suo singolare ingegno.

Rimane dunque stabilita la formula

$$\varphi(o) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{y=\infty} \sqrt{y} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, e^{-y\lambda^2}\, d\lambda .$$

Impiegando ora la nota identità

$$e^{-y\lambda^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4y}+i\xi\lambda}\, d\xi ,$$

si ottiene

$$\varphi(o) = \frac{1}{2\pi} \lim_{y=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4y}+i\xi\lambda}\, d\xi . \tag{1}$$

Con opportune condizioni relative a $\varphi(\lambda)$, noi vediamo che la (1) coincide colla formola integrale di Fourier. Un mio recente risultato sulla permutabilità dei limiti ([1]) ne permette in alcuni casi una facile discussione. Se il campo d'esistenza di $\varphi(\lambda)$ fosse un intervallo finito, allora basterebbero ben ampie condizioni sulla $\varphi(\lambda)$. La continuità in zero non è neanche essa strettamente necessaria; infatti, spezzando opportunamente gli integrali, si vede subito che $\varphi(o)$ può nella (1) essere sostituita dalla media

$$\frac{\varphi(+o) + \varphi(-o)}{2} .$$

Matematica. — *Sulle equazioni integrali.* Nota di Joseph Pérès, presentata dal Socio V. Volterra.

1. Nella sua Memoria, *Questioni generali sulle equazioni integrali* ecc. (Rend. della R. Accad. dei Lincei, 20 febbraio 1910), il professore Volterra ha ottenuto il risultato generale seguente:

Sia una relazione implicita per rapporto alla incognita ζ

$$\zeta = \varphi(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n, \zeta), \tag{1}$$

dove φ *è una funzione analitica delle variabili*

$$\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n, \zeta,$$

([1]) *Quelques observations nouvelles sur la continuité des series.* Annaes da Academia polytechnica do Porto, tomo VII (1912). Ivi si parla, è vero, delle serie, ma si può leggervi un teorema generale sui limiti. A titolo di evidente rettifica, osserviamo che ivi la relazione $R_n < \varepsilon$ va intesa $|R_n| < \varepsilon$.

nell'intorno della origine, che manchi di termine costante e di termine di 1º grado in ζ; è classico che la (1) *ha una soluzione*

$$\zeta = \psi(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n) \tag{2}$$

funzione analitica intorno alla origine e senza termine costante. Se adesso si sostituiscono alle $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n, \zeta$ funzioni finite e permutabili di 1ª specie $f_1, f_2, \dots f_n, f$, e si interpretano i prodotti come operazioni di composizione di 1ª specie, *le due serie*

$$\varphi(\overset{*}{f_1}, \overset{*}{f_2}, \dots \overset{*}{f_n}, \overset{*}{f}) \quad , \quad \psi(\overset{*}{f_1}, \overset{*}{f_2}, \dots \overset{*}{f_n})\ (^1)$$

sono convergenti, qualunque siano le funzioni $f_1, f_2, \dots f_n, f$; e l'equazione integrale, di tipo assai generale,

$$f = \varphi(\overset{*}{f_1}, \overset{*}{f_2}, \dots \overset{*}{f_n}, \overset{*}{f}),$$

*ha l'*UNICA SOLUZIONE

$$f = \psi(\overset{*}{f_1}, \overset{*}{f_2}, \dots \overset{*}{f_n}).$$

In questa Nota io mi propongo di mostrare che questo risultato si estende al caso generale in cui le funzioni $f_1, f_2, \dots f_n, f$ non sono permutabili, come l'aveva preveduto il prof. Volterra.

2. Avremo da considerare delle serie (con coefficienti numeri ordinarî) dei prodotti e potenze delle *variabili non permutabili* $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n, \zeta$. Le denoteremo con [ ]: per esempio

$$\varphi[\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n, \zeta] = a + b\zeta_1 + c\zeta_2 + \cdots + d\zeta_1^2 + e\zeta_1\zeta_2 + \\ + f\zeta_2\zeta_1 + g\zeta_2^2 + \cdots, \tag{3}$$

denotando

$$\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n, \zeta)$$

la serie

$$a + b\zeta_1 + c\zeta_2 + \cdots + d\zeta_1^2 + (e + f)\zeta_1\zeta_2 + g\zeta_2^3 + \cdots \tag{4}$$

ottenuta dalla precedente supponendo che le $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n, \zeta$ siano numeri ordinarî, dunque permutabili.

Chiameremo

$$\Phi[\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n, \zeta] = \alpha + \beta\zeta_1 + \gamma\zeta_2 + \cdots + \delta\zeta_1^2 + \varepsilon\zeta_1\zeta_2 + \\ + \varphi\zeta_2\zeta_1 + \chi\zeta_2^2 + \cdots \tag{3'}$$

(¹) Ove le stelle indicano appunto che i prodotti rappresentano composizione di 1ª specie.

la serie ottenuta sostituendo nella (3), ai coefficienti $a, b, c, \dots$, i loro moduli $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Finalmente avremo

$$(4') \qquad \Phi(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n, \zeta) = \alpha + \beta\zeta_1 + \gamma\zeta_2 + \cdots + \delta\zeta_1^2 + \\ + (\varepsilon + \varphi)\zeta_1\zeta_2 + \chi\zeta_2^2 + \cdots \text{ [1]}.$$

La serie (3) *sarà detta* REGOLARE intorno alla origine $\zeta_1 = \zeta_2 = \cdots = \zeta_n = \zeta = 0$ *quando, intorno alla origine, la* (4') *sarà convergente.*

3. Ciò premesso, sia una relazione implicita

$$(\mathrm{I}) \qquad \zeta = \varphi[\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n, \zeta]$$

dove φ è regolare nel senso precedente e non abbia nè termine costante nè termine in ζ. Io dico che:

1°) Si può trovare uno sviluppo unico

$$(\mathrm{II}) \qquad \zeta = \psi[\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n]$$

delle variabili non permutabili $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n$ *che soddisfi formalmente la equazione* (I) *e non abbia termine costante.*

La dimostrazione è la stessa che nella teoria classica delle funzioni implicite. Si vede subito che un coefficiente della ψ si esprime con i coefficienti delle φ e con quelli dei termini della ψ di grado inferiore *mediante sole addizioni e moltiplicazioni.*

2°) *Questo sviluppo è regolare nel senso precedente.*

Infatti, la serie ordinaria (cfr. n. 2)

$$\Phi(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n, \zeta)$$

è, per ipotesi, convergente per $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n, \zeta$ abbastanza piccole. Risulta allora della teoria ordinaria delle funzioni implicite che l'equazione ordinaria

$$\zeta = \Phi(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n, \zeta)$$

ha la soluzione analitica intorno alla origine, a coefficienti positivi e senza termine costante

$$\zeta = b(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n).$$

Ma l'equazione

$$\zeta = \Phi[\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n, \zeta]$$

[1] La $\Phi(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n, \zeta)$ non è in generale dedotta dalla $\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n, \zeta)$ sostituendo ai coefficienti $a, b, \dots (e+f)$ i loro moduli.

avrà per soluzione formale una serie

$$\zeta = b[\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n] \text{ (}^1\text{)}$$

che è maggiorante ([2]) della (II). Peraltro la

$$b[\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n]$$

ha i suoi coefficienti positivi: dunque la serie che, colle notazioni del n. 2, scriveremo $B(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n)$ risulta identica alla $b(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n)$. Quest'ultima serie è convergente, e quindi la

$$b[\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n]$$

è *regolare*. Dunque lo è anche la

$$\text{(II)} \qquad \psi[\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n].$$

4. Questo risultato generale contiene appunto quel che volevo dimostrare.

Sostituendo nella (I), *a* $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n, \zeta$, *le funzioni non permutabili* $f_1, f_2, \dots f_n, f$, *si ottiene una equazione integrale che ha un senso qualunque siano le funzioni finite* $f_1, f_2, \dots f_n, f$ *perchè* φ *è regolare. La soluzione di questa equazione è data dallo sviluppo* (II) *dove si fa la stessa sostituzione: sviluppo convergente, qualunque siano le funzioni finite* $f_1, f_2, \dots f_n, f$, *perchè* ψ *è regolare.*

5. Rimane adesso da dimostrare che l'equazione integrale non può avere altra soluzione che quella già trovata.

Perciò si impiegherà il metodo sviluppato, nel caso permutabile, dal prof. Volterra ([3]).

Questo metodo è fondato sul seguente lemma:

Siano ζ_1, ζ_2 due variabili *non permutabili* e $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$: si ha

$$\text{(III)} \qquad \zeta_1^{n+1} - \zeta_2^{n+1} = \zeta_1^n \zeta + \zeta_1^{n-1}\zeta\zeta_2 + \zeta_1^{n-2}\zeta\zeta_2^2 + \cdots + \zeta\zeta_2^n.$$

Per il nostro caso bisognerà aggiungere:

Se non si tratta più di

$$\zeta_1^{n+1} - \zeta_2^{n+1},$$

ma, per esempio, di

$$\varphi\zeta_1^2\psi\zeta_1^3\chi\zeta_1^{n-4} - \varphi\zeta_2^2\psi\zeta_2^3\chi\zeta_2^{n-4},$$

([1]) Il legame fra $b(\zeta_i)$ e $b[\zeta_i]$ è quello esposto al n. 2: se nella $b[\zeta_i]$ si suppone che le ζ_i siano numeri ordinarî permutabili, si trova la $A(\zeta_i)$.

([2]) Estendendo un poco il senso della parola « maggiorante », si dirà che $a\zeta_1 + b\zeta_1\zeta_2 + c\zeta_2\zeta_1 + \dots$ è maggiorante di $a'\zeta_1 + b'\zeta_1\zeta_2 + c'\zeta_2\zeta_1 + \dots$ se $a \geq |a'|, b \geq |b'|$ $c \geq |c'|, \dots$

([3]) Vedi le lezioni fatte alla Sorbonne, *Sur les fonctions de Ligne* (Gauthiers-Villars, 1913).

dove φ, χ, ψ, sono funzioni variabili non permutabili, la formola (III) si applica sempre, dopo avere sostituito ad un termine come $\zeta_1^{n-2}\,\zeta\,\zeta_2^2$ il termine

$$\varphi\,\zeta_1^2\,\psi\zeta_1^3\,\chi\,\zeta_1^{n-7}\,\zeta\,\zeta_2^2\,.$$

6. Dopo queste spiegazioni, non ci sono più difficoltà per dimostrare l'unicità della soluzione. La trattazione della equazione integrale del n. 4 rimane così completa.

Prima di terminare osserviamo che analoghe considerazioni si possono sviluppare per le equazioni integro-differenziali.

In un'altra Nota [1] ho mostrato l'interesse che presentano le equazioni integrali dove appariscono parecchie specie di composizione. I resultati precedenti sussisterebbero anche se si supponesse che le f_i fossero delle funzioni che, nella mia Nota, chiamo a_α e b_γ.

Matematica. — *Sulle funzioni permutabili di seconda specie.* Nota IV di Luigi Sinigallia, presentata dal Corrisp. G. Lauricella.

5. Col metodo ora indicato poichè $n > q > q_1 > \cdots$ è certo che si giungerà ad un nucleo iterato F_k di ordine k la cui espressione sarà data dalla (15) e tale che il determinante $|B_{i,h}^{(k)}|$ sarà diverso da zero. Ora se si pone

$$(16)\qquad \begin{cases} B_{i,h}^{(k,0)} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = h \\ 0 \text{ se } i \neq h \end{cases} \qquad B_{i,h}^{(k,1)} = B_{i,h}^{(k)} \\[2ex] B_{i,h}^{(k,\rho)} = \sum_{r=1}^{q_{k-3}} B_{i,r}^{(k,1)}\, B_{r,h}^{(k,\rho-1)} \qquad \begin{pmatrix} i\,, h = 1\,, \ldots\, q_{k-3} \\ \varrho = 1\,, 2\,, \ldots \end{pmatrix}, \end{cases}$$

il nucleo $F_{k+\rho-1}$ iterato, di ordine $k + \varrho - 1$ avrà l'espressione

$$(17)\qquad F_{k+\rho-1}(x\,, y) = \sum_{i,h=1}^{q_{k-3}} B_{h,i}^{(k,\rho)}\, \varphi_i^{(k-2)}(x)\, \psi_h^{(k-2)}(y)\,.$$

Infatti la (17) sussiste per $\varrho = 0$ e per $\varrho = 1$ poichè per tali valori di ϱ coincide rispettivamente colle (14), (15): inoltre supposta la (17) vera pel valore ϱ, da essa si deduce

$$F_{k+\rho}(x\,, y) = \sum_{i,r=1}^{q_{k-3}} B_{r,i}^{(k,\rho)}\, \varphi_i^{(k-2)}(x) \times$$
$$\times \left\{ \sum_{h=1}^{q_{k-3}} \frac{B_{h,r}^{(k)}}{\lambda_h} \psi_h(y) + \sum_{\sigma=0}^{k-3} \sum_{\tau=1}^{q_{\sigma-1}-q_\sigma} \frac{B_{q_\sigma+\tau,r}^{(k)}}{\lambda_{q_\sigma+\tau}} \psi_{q_\sigma+\tau}(y) \right\},$$

[1] *Résolution des problèmes aux limites relatifs à une équation intégro-différentielle* (Rendiconti di Palermo, 1913).