ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Tutte queste fenaciti, come quelle di Piracicaba, sono perfettamente radioinattive e merita perciò considerazione il fatto che campioni di questo silicato del glucinio, appartenenti a giacimenti tanto lontani l'uno dall'altro, non contengano alcuna traccia d'elio, che invece si trova quasi sempre nei berilli e nei crisoberilli, con cui spesso la fenacite stessa è associata.

Matematica. — *Sulle equazioni integrali.* Nota di GIULIO ANDREOLI, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sul moto di un punto attratto da più centri fissi.* Nota del dott. ing. G. ARMELLINI, presentata dal Corrispondente E. ALMANSI.

Sia Q un punto mobile (la cui massa prenderemo per semplicità come unitaria) attratto con legge Newtoniana da più centri fissi $P_1 P_2 \dots P_n$.

Chiamando con $a_i\, b_i\, c_i$ le coordinate di P_i riferite ad un sistema cartesiano di assi fissi, e con $x\, y\, z$ quelle di Q avremo le equazioni:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \sum\limits_{i=1}^{i=n} K_i \dfrac{x - a_i}{r_i^3} = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} + \sum\limits_{i=1}^{i=n} K_i \dfrac{y - b_i}{r_i^3} = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} + \sum\limits_{i=1}^{i=n} K_i \dfrac{z - c_i}{r_i^3} = 0\,; \end{cases}$$

le quali, come è notissimo, ammettono l'integrale primo:

$$(2)\qquad \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{K_i}{r_i} = h\,.$$

I casi in cui fin ad ora si sa risolvere il problema del moto sono i seguenti:

I) $n = 1$; è la questione elementare del moto centrale;

II) $n = 2$; abbiamo la soluzione classica di Eulero, semplificata con l'introduzione delle coordinate ellittiche [1];

III) Gli n centri appartengono ad una stessa retta α e la velocità iniziale di Q non è complanare con α.

[1] Una chiara esposizione del problema può vedersi nello Charlier, *Die Mechanick des Himmels*, Band I, seite 117-163. Ved. anche: Andrade, Journal de l'École Polytechnique 1890.

La soluzione di questo III) caso è dovuta al senatore Volterra [1], il quale, dopo aver dimostrato che Q non può mai incontrare la retta α, costruisce per le tre coordinate le stelle di Mittag-Leffler e dà quindi lo sviluppo in serie.

Ciò posto nella presente Nota io mi propongo di trovare la soluzione generale del problema nominato, comunque siano disposti i centri fissi P_1 $P_2 \dots P_n$. Il metodo che adopererò sarà naturalmente diverso da quello adoperato dal senatore Volterra, giacchè mentre egli fondava la sua soluzione sull'impossibilità di un eventuale coincidenza di Q con P_i, io dovrò fondare la mia nello studio delle singolarità delle equazioni differenziali del moto nell'intorno di una coincidenza stessa.

Costruiamoci a tale scopo la funzione:

$$R = r_1 r_2 \dots r_n \tag{3}$$

la quale, indicando con r_i la distanza QP_i, è simmetrica rispetto alle coordinate a_i b_i c_i degli n centri; ed eliminiamo il tempo fra il sistema (1) e l'equazione differenziale:

$$\frac{dt}{d\lambda} - R = 0 . \tag{4}$$

Supponiamo che nell'istante t_1 il punto mobile Q venga a coincidere con uno dei centri fissi, ad es. P_g: sia λ_1 il valore corrispondente di λ, certamente reale perchè la (4) (una volta scelta la costante arbitraria in modo per es. che per $t = 0$ sia $\lambda = 0$) fa corrispondere a valori reali del tempo, valori reali di λ_1 [2].

[1] *Sopra alcune applicazioni della rappresentazione analitica delle funzioni del prof. Mittag-Leffler.* Nota del Socio Volterra, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXIV. Sarà inutile ricordare che, se Q giace inizialmente su α e la sua velocità iniziale è diretta secondo questa retta, oppure se Q è costretto a muoversi sopra una superficie di rivoluzione avente per asse α, il problema si riduce alle quadrature.

[2] Sarà facile al lettore di dimostrare che variando t tra $-\infty$ e $+\infty$ anche λ varia tra $-\infty$ e $+\infty$ e viceversa: tranne il caso speciale, privo d'importanza, in cui Q coincida per tutti i tempi con uno dei centri P.

Nell'istante dell'urto $R = \frac{dt}{d\lambda} = 0$. Ma abbiamo anche $\frac{d^2t}{d\lambda^2} = \frac{dR}{d\lambda} = R\frac{dR}{dt} = 0$; infatti R diviene infinitesimo di primo ordine, e $\frac{dR}{dt}$ infinito di ordine $\frac{1}{2}$. Il tempo t non ha perciò nè un massimo nè un minimo per $\lambda = \lambda_1$; solo la curva $t = t(\lambda)$ presenta una tangente di flesso parallela alle ascisse.

Chiamiamo con $\xi_g\,\eta_g\,\zeta_g$ le coordinate di Q relative a P_g, e poniamo per brevità:

$$(5)\qquad \begin{cases} f_1 = \dfrac{1}{R}\dfrac{d\xi_g}{d\lambda}\dfrac{dR}{d\lambda} - K_g\dfrac{\xi_g}{r_g}\left(\dfrac{R}{r_g}\right)^2 - R^2\,\Sigma'\,K_i\,\dfrac{x-a_i}{r_i^3} \\[2ex] f_2 = \dfrac{1}{R}\dfrac{d\eta_g}{d\lambda}\dfrac{dR}{d\lambda} - K_g\dfrac{\eta_g}{r_g}\left(\dfrac{R}{r_g}\right)^2 - R^2\,\Sigma'\,K_i\,\dfrac{y-b_i}{r_i^3} \\[2ex] f_3 = \dfrac{1}{R}\dfrac{d\zeta_g}{d\lambda}\dfrac{dR}{d\lambda} - K_g\dfrac{\zeta_g}{r_g}\left(\dfrac{R}{r_g}\right)^2 - R^2\,\Sigma'\,K_i\,\dfrac{z-c_i}{r_i^3}\,; \end{cases}$$

dove gl' indici delle sommatorie Σ indicano che in esse non è compreso il termine relativo al centro P_g.

Servendoci delle posizioni (5) giungeremo, con l'eliminazione anzidetta, e prendendo λ come variabile indipendente, al sistema:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi_g}{d\lambda} = \xi'_g & \dfrac{d\xi'_g}{d\lambda} = f_1 \\[2ex] \dfrac{d\eta_g}{d\lambda} = \eta'_g & \dfrac{d\eta'_g}{d\lambda} = f_2 \\[2ex] \dfrac{d\zeta_g}{d\lambda} = \zeta'_g & \dfrac{d\zeta'_g}{d\lambda} = f_3\,. \end{cases}$$

Le (6) sono particolarmente adatte per lo studio del moto nelle vicinanze di P_g.

Notiamo ora che, quando Q è estremamente vicino a P_g, l'attrazione dei centri $P_1\,P_2 \ldots P_{g-1}\,P_{g+1} \ldots P_n$ su Q è trascurabile rispetto a quella esercitata da P_g stesso.

Valendoci di questo concetto, non è difficile dimostrare che, mentre λ tende verso λ_1, e $\xi_g\,\eta_g\,\zeta_g\,r_g$ tendono saparatamente verso 0, i rapporti $\dfrac{\xi_g}{r_g}\,\dfrac{\eta_g}{r_g}\,\dfrac{\zeta_g}{r_g}$ tendono verso limiti determinati $\alpha_g\,\beta_g\,\gamma_g$ (legati naturalmente dalla relazione $\alpha_g^2 + \beta_g^2 + \gamma_g^2 = 1$); la velocità angolare con cui ruota il raggio vettore $P_g Q$ non può quindi crescere all' infinito.

Tenendo presente questa considerazione e giovandoci dell' integrale delle forze vive (2), abbiamo:

$$(7)\qquad \lim_{\lambda=\lambda_1} f_1 = \lim_{\lambda=\lambda_1}\left\{\frac{1}{R}\frac{d\xi_g}{d\lambda}\frac{dR}{d\lambda} - K_g\frac{\xi_g}{r_g}\left(\frac{R}{r_g}\right)^2 - R^2\,\Sigma'\,K_i\,\frac{x-a_i}{r_i^3}\right\} =$$

$$= \lim_{\lambda=\lambda_1}\left\{R\frac{d\xi_g}{dt}\frac{dR}{dt} - K_g\frac{\xi_g}{r_g}\left(\frac{R}{r_g}\right)^2\right\} =$$

$$= \lim_{\lambda=\lambda_1}\left\{R^2\frac{d\xi_g}{dt}\frac{dr_g}{dt}\frac{1}{r_g} - K_g\frac{\xi_g}{r_g}\left(\frac{R}{r_g}\right)^2\right\} =$$

$$= \left(\frac{R}{r_g}\right)^2 K_g\,\alpha_g = \text{quantità finita,}$$

e analogamente:

$$(8) \qquad \lim_{\lambda=\lambda_1} f_2 = \left(\frac{R}{r_g}\right)^2 K_g \beta_g \quad ; \quad \lim_{\lambda=\lambda_1} f_3 = \left(\frac{R}{r_g}\right)^2 K_g \gamma_g .$$

Dalle (7) e dalle (8) deduciamo immediatamente che gl'integrali del sistema (6), nell'intorno di λ_1, sono sviluppabili in serie di potenze della quantità $\lambda - \lambda_1$.

Ora per $\lambda - \lambda_1$ avvenendo la coincidenza di Q con P_g, $\xi_g \eta_g \zeta_g$ sono evidentemente nulli; dico che anche $\xi'_g \eta'_g \zeta'_g$ si annullano. Infatti abbiamo dall'integrale (2) delle forze vive:

$$(9) \qquad \left(\frac{d\xi_g}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_g}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_g}{d\lambda}\right)^2 = 2R^2 \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{K_i}{r_i}\right) + h \right\}$$

e quindi:

$$(9^{bis}) \qquad \lim_{\lambda=\lambda_1} \frac{d\xi_g}{d\lambda} = \lim_{\lambda=\lambda_1} \frac{d\eta_g}{d\lambda} = \lim_{\lambda=\lambda_1} \frac{d\zeta_g}{d\lambda} = 0 .$$

Ricordando perciò che abbiamo posto $x = a_g + \xi_g$ ecc., otterremo:

$$(10) \qquad \begin{cases} x = a_g + \frac{1}{2!} A_2 (\lambda - \lambda_1)^2 + \frac{1}{3!} A_3 (\lambda - \lambda_1)^3 + \cdots \\ y = b_g + \frac{1}{2!} B_2 (\lambda - \lambda_1)^2 + \frac{1}{3!} B_3 (\lambda - \lambda_1)^3 + \cdots \\ z = c_g + \frac{1}{2!} C_2 (\lambda - \lambda_1)^2 + \frac{1}{3!} C_3 (\lambda - \lambda_1)^3 + \cdots \end{cases}$$

La (4) ci darà poi, sviluppando R in funzione di $\xi_g \eta_g \zeta_g$ nell'intorno di λ_1 e integrando:

$$(11) \qquad t - t_1 = \frac{1}{3!} D_3 (\lambda - \lambda_1)^3 + \frac{1}{4!} D_4 (\lambda - \lambda_1)^4 + \cdots$$

donde deduciamo che $x\, y\, z$ nell'intorno dell'istante t_1 sono svolgibili secondo le potenze del radicale $(t - t_1)^{\frac{1}{3}}$; si ha cioè un punto di diramazione algebrico [1].

Determiniamo il raggio di convergenza delle serie (10). Sia 2Δ la minima delle distanze reciproche dei centri $P_1 P_2 \ldots P_n$ tra di loro; poichè questi sono tutti distinti, sarà $2\Delta > 0$. Ciò posto i secondi membri del sistema (6) sono funzioni algebriche intere rispetto a $\xi'_g \eta'_g \zeta'_g$ e razionali ri-

[1] Analogamente a ciò che fa il Sundman nella sua recentissima *Mémoire sur le problème des trois corps* (Acta Mathematica, 36), anche noi supponiamo che, nell'istante dell'urto, non entrino in azione altre forze *di natura differente dall'attrazione Newtoniana.*

spetto a $\xi_g\,\eta_g\,\zeta_g$; sviluppabili quindi in serie di potenze comunque grandi siano le $\xi'_g\,\eta'_g$ e ζ'_g e purchè valgano le disuguaglianze:

$$r_g^2 = \xi_g^2 + \eta_g^2 + \zeta_g^2 < 2\Delta\,. \tag{12}$$

Per semplificare i risultati prenderemo Δ come unità di lunghezza, e faremo variare tanto le $\xi_g\,\eta_g\,\zeta_g$ quanto le $\xi'_g\,\eta'_g\,\zeta'_g$ in modo che i loro moduli si conservino inferiori o al più eguali a $\sqrt{1/3}$; r_g sarà quindi ≤ 1. Avremo:

$$|f_1| \leq \left|\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d\xi_g}{d\lambda}\frac{d\mathrm{R}}{d\lambda}\right| + \left|\mathrm{K}_g\,\frac{\xi_g}{r_g}\left(\frac{\mathrm{R}}{r_g}\right)^2\right| + \left|\left(\frac{\mathrm{R}}{r_g}\right)^2 \Sigma'\,\mathrm{K}_i\,\frac{x-a_i}{r_i^3}\right|; \tag{13}$$

e, finchè $\xi_g\,\eta_g$ ecc. variano dentro i campi accennati, sarà, indicando solo i passaggi più difficili:

$$\left|\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d\xi_g}{d\lambda}\frac{d\mathrm{R}}{d\lambda}\right| = \left|\mathrm{R}\frac{d\xi_g}{dt}\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right| < \left|\mathrm{R}v^2\left(\frac{\mathrm{R}}{r_g} + \mathrm{R}(n-1)\right)\right| < \tag{14}$$

$$< \left|n\mathrm{L}_g^2\left(2h + 2\sum_{i=1}^{i=n}(\mathrm{K}_i)\right)\right|$$

avendo posto:

$$\mathrm{L}_g = (\delta_{g1}+1)(\delta_{g2}+1)\ldots(\delta_{g,g-1}+1)(\delta_{g,g+1}+1)\ldots(\delta_{gn}+1) \tag{14^{bis}}$$

dove δ_{gm} indica la distanza $\mathrm{P}_g\,\mathrm{P}_m$. E ancora, essendo le k positive:

$$\left|\mathrm{K}_g\,\frac{\xi_g}{r_g}\left(\frac{\mathrm{R}}{r_g}\right)^2\right| < \mathrm{K}_g\,\mathrm{L}_g^2 \tag{15}$$

$$\left|\left(\frac{\mathrm{R}}{r_g}\right)^2 \Sigma'\,\mathrm{K}_i\,\frac{x-a_i}{r_i^3}\right| < \mathrm{L}_g^2\,\Sigma'\,\mathrm{K}_i\,. \tag{16}$$

Tutti i secondi membri del sistema (6) risulteranno quindi, *dentro questi campi*, inferiori in modulo alla quantità:

$$\mathrm{L}_g^2\left\{(1+2n)\sum_{i=1}^{i=n}\mathrm{K}_i + |2nh|\right\} + 1 = \frac{1}{\varrho_g\sqrt{3}}\,. \tag{17}$$

Ricordiamo ora che dato un sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{dy_i}{dx} = \mathrm{Y}_i(y_1\,y_2\ldots y_n)\,; \qquad (i = 1\,,2\,,\ldots n) \tag{18}$$

se, nell' intorno del punto $y_{10}\,y_{20}\ldots y_{n0}$ (corrispondente ad $x = x_0$), le Y_i sono sviluppabili in serie di potenze convergenti per:

$$|y_i - y_{i0}| < \mu\,; \tag{19}$$

e se, verificando le variabili la (19) le Y_i restano inferiori in modulo ad M;

allora gl'integrali $y_1\, y_2 \dots y_n$ sono sviluppabili in serie di potenze, convergenti certamente per [1]

$$|x - x_0| \leq \frac{\mu}{M}\,. \tag{20}$$

Applicando questo teorema, ed indicando con ϱ una quantità positiva, minore o al più uguale alla minima delle n quantità ϱ_g, arriveremo facilmente alla seguente conclusione:

Il raggio di convergenza delle serie (10) nell'intorno di un valore λ^*, a cui corrisponde la coincidenza di Q con uno qualsiasi degli n centri P_1 $P_2 \dots P_n$, sarà certamente maggiore o al più uguale a ϱ. Il calcolo numerico di ϱ non offre nessuna difficoltà servendosi dell'equazione (17): basta conoscere le coordinate dei centri P e le costanti K.

Sia ora $\bar{t}$ un valore reale del tempo per cui non abbia luogo alcuna coincidenza e $\bar{\lambda}$ il corrispondente valore di λ (certamente reale, avendosi come si è detto $t = 0$ per $\lambda = 0$). Chiamando con $\xi_l\, \eta_l\, \zeta_l$ le coordinate di Q relative al centro P_l ad esso più vicino nell'istante $\bar{t}$, e sviluppando $x\, y\, z$ secondo le potenze di $\lambda - \bar{\lambda}$ sarebbe facile vedere che il raggio di convergenza $\bar{\varrho}$ è $\geq \varrho$.

Se quindi consideriamo λ come una quantità complessa, e costruiamo nel suo piano di Gauss una striscia di spessore 2ϱ, limitata da due rette parallele all'asse reale e distanti da esso da una parte e dall'altra del segmento ϱ, l'area così individuata sarà una zona d'olomorfismo per le tre coordinate $x\, y\, z$, considerate come funzioni di λ stessa.

Facendo corrispondere, come si è detto, $\lambda = 0$ con $t = 0$, e trasformando conformemente la striscia in un cerchio di raggio unitario, per mezzo della posizione:

$$q = \frac{e^{\frac{\pi\lambda}{2\varrho}} - 1}{e^{\frac{\pi\lambda}{2\varrho}} + 1} \tag{21}$$

avremo:

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_0 + E_1 q + \frac{E_2}{2!} q^2 + \cdots \\ y &= y_0 + F_1 q + \frac{F_2}{2!} q^2 + \cdots \\ z &= z_0 + G_1 q + \frac{G_2}{2!} q^2 + \cdots \end{aligned}\right. \tag{22}$$

[1] Ved. ad esempio Jordan, *Cours d'Analyse*, tom. III; Picard, *Traité d'Analyse* tom. II, ecc.

insieme con:

$$t = \int_0^q R(q) \, . \, d\lambda(q) \, ; \tag{23}$$

ed essendo $x\,y\,z$ regolari nel cerchio unitario le (22) saranno uniformemente convergenti per $|q| < 1$.

I coefficienti E_1 F_1 ecc. sono conosciuti perchè sono date le coordinate iniziali e la velocità iniziale di Q ed avendosi

$$E_1 = \left(\frac{dx}{dq}\right)_{q=0} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} \left(\frac{d\lambda}{dq}\right)_{q=0} \text{ ecc.} \tag{24}$$

Variando q tra -1 e $+1$, λ varia tra $-\infty$ e $+\infty$ e quindi anche t passa dal valore $-\infty$ al valore $+\infty$ (tranne, come si è detto, il caso privo d'importanza, in cui la posizione di Q coincida perpetuamente con uno dei centri P).

Per lo scopo che c'interessa basterà far variare q tra 0 e 1; le (22) ci daranno le coordinate $x\,y\,z$ di Q e la (23) il tempo corrispondente, da $t = 0$ fino a $t = \infty$. Il nostro problema è quindi rigorosamente risoluto.

Riassumendo, abbiamo il seguente teorema:

Adoperando una variabile indipendente q, opportunamente scelta, le coordinate di un punto mobile Q, *sottomesso all'attrazione di più centri fissi* P_i, *sono esprimibili per mezzo di serie di potenze, convergenti per* $|q| < 1$; *le quali rappresentano il movimento da* $t = -\infty$ *a* $t = +\infty$. *Questa soluzione è valida qualunque sia il numero di volte che il punto* Q *viene ad incontrare, nel suo moto, uno qualsiasi dei centri fissi; benchè in tal caso la sua velocità divenga infinita.*

Il tempo corrispondente ad ogni posizione, è dato da una quadratura.

Possiamo utilmente confrontare questo risultato con uno analogo, ottenuto dal Sundman [1] *nel problema dei tre corpi; solamente, mentre le formole del Sundman suppongono che il momento delle quantità di moto del sistema non sia nullo, le nostre sono indipendenti da qualsiasi ipotesi.*

Terminiamo questa Nota avvertendo che, con qualche limitazione, si potrebbe estendere la nostra soluzione al caso in cui i centri fissi siano in numero infinito; ma la brevità dello spazio non ci permette per ora di svolgere questo concetto.

[1] Acta Mathematica, loc. cit.