ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Matematica. — *Un teorema di Paolo Ruffini sulla « Teoria delle sostituzioni »*. Nota di Ettore Bortolotti, presentata dal Socio L. Bianchi.

Al n. 273 della *Teoria generale delle equazioni* (Bologna, 1799) Paolo Ruffini dimostra il teorema:

Eseguita nel risultato 1° (tav. VI) una permutazione qualunque,..., e osservato quali radici vengano smosse per tale permutazione in ciascuno dei risultati in prima fila, se suppongo la y tale che il risultato 1° resti sempre il medesimo mentre la permutazione supposta si eseguisca in esso fra qualunque delle accennate radici ..., dovrà sempre ricavarsi tal risultato 1° = 25°.

Nella terminologia ora in uso quel teorema si enuncia al modo seguente:

Se un gruppo di sostituzioni tra 5 elementi 1, 2, 3, 4, 5, contiene, insieme con una sostituzione qualsiasi t, tutte le trasformate di essa mediante il ciclo

$$S_5 = (1\,,2\,,3\,,4\,,5)$$

contiene anche questo medesimo ciclo.

A proposito di questo teorema, lo stesso Ruffini in una Nota marginale [1] sopra un esemplare del suo libro ha lasciato scritto:

« *Il teorema del n. 273, vero generalissimamente nelle funzioni di cinque radici, o di un numero di radici primo, non è così quando il numero delle medesime non fosse primo.*

« *Perciò nell'applicazione del medesimo, sono necessarie alcune avvertenze.*

« *Vedasi un foglio in data 24 agosto 1802* ».

Poichè fra i manoscritti di Ruffini, conservati presso la Biblioteca della R. Accademia di Scienze in Modena, non esiste il foglio richiamato da questa Nota, era interessante verificare la esattezza del teorema, del quale non si trova menzione nelle opere di autori posteriori, e ciò appunto mi propongo di fare nella presente comunicazione.

[1] Questa Nota si trova nell'esemplare (conservato dalla direzione del Circ. Mat. di Palermo) che ha servito alla ristampa delle « *Opere matematiche di Paolo Ruffini* » *nuovamente pubblicate a cura del Circolo Matematico di Palermo.* Delle quali il primo volume sta per uscire.

1. Il Ruffini ha certamente ragione affermando *non vero il teorema per un numero di lettere p non primo.*

Ciò si scorge osservando che, per p numero composto, fra le potenze di $S_p = (1, 2, .., p)$ ve ne ha di quelle che hanno periodo inferiore a p. Il gruppo generato da una di tali sostituzioni è invariante per la S_p, e non contiene questa sostituzione.

Nel caso di p primo il teorema è esatto, e ne farò qui la dimostrazione cercando, finchè è possibile, di giovarmi solo di risultamenti noti al Ruffini e di seguire un procedimento non dissimile da quello che egli stesso usava adoperare.

2. Lemma I. — *Una sostituzione*

$$T = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, p-1, p \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_{p-1}\, \alpha_p \end{pmatrix}$$

la quale operi sopra non più di p elementi, non può essere permutabile col ciclo

$$S_p = (1, 2, 3, \dots, p)$$

che comprende tutti questi p elementi, se non coincide con una potenza di S_p.

Si ha infatti

$$S_p^{-1} T S_p = \begin{pmatrix} 2, & 3, & 4, & \dots, & p, & 1 \\ \alpha_1 + 1, & \alpha_2 + 1, & \alpha_3 + 1, & \dots, & \alpha_{p-1} + 1, & \alpha_p + 1 \end{pmatrix}$$

dunque, nella ipotesi di

$$T = S_p^{-1} T S_p,$$

si dovrà avere:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 1, \ \alpha_3 = \alpha_2 + 1, \dots, \alpha_p = \alpha_{p-1} + 1,$$

cioè

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 1, \ \alpha_3 = \alpha_1 + 2, \dots, \alpha_p = \alpha_1 + p - 1;$$

da cui:

$$T = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \dots, & p-1, & p \\ \alpha_1, & \alpha_1 + 1, & \alpha_1 + 2, & \dots, & \alpha_1 + p - 2, & \alpha_1 + p - 1 \end{pmatrix} = S_p^{\alpha_1 - 1}.$$

3. Corollario. — *Se p è numero primo, ed una sostituzione* T *nei p elementi*

$$1, 2, \dots, p$$

non è permutabile col ciclo

$$S_p = (1, 2, \dots, p),$$

si hanno p trasformate diverse della T, *per le sostituzioni del gruppo ciclico generato da* S_p.

4. Lemma II. — *Le sostituzioni diverse, trasformate mediante* S_p *di una qualunque sostituzione* T *nei* p *elementi* $1, 2, \ldots, p$ *non permutabile con* S_p, *generano un gruppo* G *transitivo.*

E di fatto, se, per effetto della T, al posto di 1 viene l'elemento α, la trasformata

$$T_\alpha = S_p^{-\alpha}\, T\, S_p^\alpha$$

al posto dell'elemento α porta l'elemento 2α e la

$$T\, T_\alpha$$

al posto dell'elemento 1 porta l'elemento 2α.

Così si vede che, mediante la operazione

$$T\, T_{(m-1)\alpha},$$

al posto dell'elemento 1 viene l'elemento $m\alpha$.

Ma, essendo p primo ed α minore di p, i numeri

$$\alpha, 2\alpha, \ldots, p\alpha$$

sono tutti incongrui rispetto al mod. p, e quindi per ogni $r \leqq p$ si può determinare un $m \leqq p$, tale che

$$m\alpha \equiv r \pmod p,$$

ed esiste una sostituzione del gruppo che fa passare l'elemento r preso in modo qualunque fra i p elementi dati, al posto dell'elemento 1.

5. *L'ordine del nostro gruppo* G *è dunque multiplo di* p *od eguale a* p (1).

Da ciò si deduce che *il nostro gruppo contiene delle operazioni di periodo* p (2).

(1) Il concetto di *transitività* si deve a Ruffini; la proposizione qui ricordata è contenuta implicitamente nell'art. 25 della Memoria; *Della soluzione delle equazioni algebriche determinate particolari di grado superiore al quarto* (Mem. di mat. e di fisica della Soc. ital. delle Scienze, tom. IX (Modena, 1802), pp. 444-526), nel quale articolo egli dimostra che: eseguendo tutte le sostituzioni di un gruppo transitivo, in ogni determinato posto deve venire ciascuna delle m lettere, e ciascuna uno stesso numero di volte.

(2) Il caso particolare del *Teorema di Sylow*, che qui occorre di considerare, era noto a Ruffini, il quale nella *Teoria delle equazioni* (1799) al n. 274, lo ha dimostrato per $p = 5$, e, nella Memoria: *Alcune proprietà generali delle funzioni* [Mem. di mat. e di fis. della Soc. ital. delle Scienze, tom. XIII, parte 1ª (1807) nn. 40-41] ha in generale dimostrato che; *se un gruppo di operazioni (due a due permutabili) ha ordine* $n = abc \ldots$; *essendo* a, b, c *numeri primi tutti diversi, contiene anche operazioni di qualunque periodo divisore di* n.

6. Rimane così dimostrato, con sole considerazioni tolte dalle Memorie di Ruffini, il teorema:

Se p è numero primo, ed un gruppo G di sostituzioni sopra p lettere contiene tutte le trasformate di una sostituzione T in quelle lettere mediante il ciclo

$$S_p = (1\,,2\,,\ldots p)\,,$$

contiene almeno un ciclo

$$\tau = (\alpha_1\,,\alpha_2\,,\ldots\,\alpha_p)$$

di ordine p.

Questo teorema potrebbe bastare per le applicazioni che ne fa Ruffini alla teoria delle equazioni: volendo tuttavia completare la dimostrazione del teorema nella forma enunciata dallo stesso Ruffini; nel caso che la sostituzione

$$\tau = (\alpha_1\,,\alpha_2\,,\ldots,\alpha_p)$$

della quale abbiamo constatato l'esistenza nel gruppo

$$G = \{1\,,T\,,T_1 = S_p^{-1}\,T\,S_p\,,\ldots,T_{p-1} = S_p^{-p+1}\,T\,S_p^{p-1}\}$$

non sia una potenza di S_p, dovrà la stessa τ risultare dal prodotto

$$\tau = T_{r_1}\,T_{r_2}\ldots$$

di alcune delle $T\,,T_1\,,\ldots,T_{p-1}$; perciò nel gruppo G è contenuta anche la trasformata di τ mediante S_p.

Se ora si considera che, per essere p primo, la massima potenza di p contenuta in $1.2.3\ldots p$, è la prima, vediamo che tale è anche la massima potenza di p contenuta nell'ordine del nostro gruppo, ma allora *il gruppo G contiene anche la sostituzione* S_p *che trasforma l'una nell'altra le due operazioni affini*

$$\tau\,,\;S_p^{-1}\,\tau\,S_p\,,$$

come appunto volevamo provare (¹).

7. Risulta così dimostrato il *Teorema di Ruffini*:

Se un gruppo G di sostituzioni nei p elementi $1\,,2\,,\ldots,p$ *contiene, insieme con una sostituzione T anche tutte le trasformate di T mediante potenze di* $S_p = (1\,,2\,,3\,,\ldots,p)$; *la* S_p *medesima sarà contenuta nel gruppo G.*

8. Ruffini attribuisce speciale importanza alle sostituzioni della forma

$$S_n = (1\,,2\,,3\,,\ldots,n) \qquad n = 1\,,2\,,3\,,\ldots,p\,,$$

(¹) Ciò per il *secondo teorema di Sylow*; cfr. L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni* (Pisa, 1900), pag. 61.

le quali (sia per numeri p semplici, sia per numeri composti) riguarda come FATTORI ELEMENTARI, *mediante i quali si può, in modo unico, rappresentare una qualunque sostituzione* T_p *nei* p *elementi, sotto la forma*

$$T_p = S_p^{\alpha_p} S_{p-1}^{\alpha_{p-1}} S_{p-2}^{\alpha_{p-2}} \dots S_3^{\alpha_3} S_2^{\alpha_2},$$

analoga a quella che, in aritmetica, ci dà la *scomposizione di un numero nei suoi fattori primi.*

Per dimostrar ciò, egli rappresenta i successivi gruppi G_n, $n = 2, 3, \dots, p$, totali negli n elementi, al modo seguente (¹):

$$G_2 = S_2 \,,\quad G_3 = \left\{\begin{matrix} G_2 \\ S_3 G_2 \\ S_3^2 G_2 \end{matrix}\right. ,\quad G_4 = \left\{\begin{matrix} G_3 \\ S_4 G_3 \\ S_4^2 G_3 \\ S_4^3 G_3 \end{matrix}\right. ,\ \dots,\ G_p = \left\{\begin{matrix} G_{p-1} \\ S_p G_{p-1} \\ S_p^2 G_{p-1} \\ \dots\dots \\ S_p^{p-1} G_{p-1} \end{matrix}\right. ,$$

e dall'esame di questo quadro deduce che, una *qualunque sostituzione* T_p *si può sempre, ed in modo unico, rappresentare sotto la forma*

$$T_p = S_p^{\alpha} T_{p-1},$$

dove α *è uno dei numeri* $1, 2, \dots p$, e T_{p-1} *è una sostituzione nei* $p-1$ *primi elementi.*

Di questa rappresentazione, il Ruffini fa uso costante, e ne ricava un metodo induttivo assai fecondo di dimostrazione e di ricerca.

Il qual metodo fu a torto abbandonato dai suoi continuatori.

Matematica. — *Sul calcolo della funzione di Green per le equazioni differenziali e integro-differenziali di tipo parabolico.* Nota di G. C. EVANS, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(¹) Cfr. P. Ruffini, *Teoria generale delle equazioni* (Bologna, 1799), n. 268; *Della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto* (Modena, 1803), nn. 1, 8, 50 ecc.