ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

dove φ, χ, ψ, sono funzioni variabili non permutabili, la formola (III) si applica sempre, dopo avere sostituito ad un termine come $\zeta_1^{n-2}\zeta\zeta_2^2$ il termine

$$\varphi\zeta_1^2\psi\zeta_1^3\chi\zeta_1^{n-7}\zeta\zeta_2^2 .$$

6. Dopo queste spiegazioni, non ci sono più difficoltà per dimostrare l'unicità della soluzione. La trattazione della equazione integrale del n. 4 rimane così completa.

Prima di terminare osserviamo che analoghe considerazioni si possono sviluppare per le equazioni integro-differenziali.

In un'altra Nota [1] ho mostrato l'interesse che presentano le equazioni integrali dove appariscono parecchie specie di composizione. I resultati precedenti sussisterebbero anche se si supponesse che le f_i fossero delle funzioni che, nella mia Nota, chiamo a_α e b_γ.

Matematica. — *Sulle funzioni permutabili di seconda specie.* Nota IV di Luigi Sinigallia, presentata dal Corrisp. G. Lauricella.

5. Col metodo ora indicato poichè $n > q > q_1 > \cdots$ è certo che si giungerà ad un nucleo iterato F_k di ordine k la cui espressione sarà data dalla (15) e tale che il determinante $|B_{i,h}^{(k)}|$ sarà diverso da zero. Ora se si pone

$$(16)\qquad \begin{cases} B_{i,h}^{(k,0)} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = h \\ 0 \text{ se } i \neq h \end{cases} \qquad B_{i,h}^{(k,1)} = B_{i,h}^{(k)} \\ B_{i,h}^{(k,\rho)} = \displaystyle\sum_{r=1}^{q_{k-3}} B_{i,r}^{(k,1)} B_{r,h}^{(k,\rho-1)} \qquad \begin{pmatrix} i, h = 1, \dots q_{k-3} \\ \rho = 1, 2, \dots \end{pmatrix}, \end{cases}$$

il nucleo $F_{k+\rho-1}$ iterato, di ordine $k+\rho-1$ avrà l'espressione

$$(17)\qquad F_{k+\rho-1}(x, y) = \sum_{i,h=1}^{q_{k-3}} B_{h,i}^{(k,\rho)} \varphi_i^{(k-2)}(x)\, \psi_h^{(k-2)}(y) .$$

Infatti la (17) sussiste per $\rho = 0$ e per $\rho = 1$ poichè per tali valori di ρ coincide rispettivamente colle (14), (15): inoltre supposta la (17) vera pel valore ρ, da essa si deduce

$$F_{k+\rho}(x, y) = \sum_{i,r=1}^{q_{k-3}} B_{r,i}^{(k,\rho)} \varphi_i^{(k-2)}(x) \times$$
$$\times \left\{ \sum_{h=1}^{q_{k-3}} \frac{B_{h,r}^{(k)}}{\lambda_h} \psi_h(y) + \sum_{\sigma=0}^{k-3} \sum_{\tau=1}^{q_{\sigma-1}-q_\sigma} \frac{B_{q_\sigma+\tau,r}^{(k)}}{\lambda_{q_\sigma+\tau}} \psi_{q_\sigma+\tau}(y) \right\},$$

[1] *Résolution des problèmes aux limites relatifs à une équation intégro-différentielle* (Rendiconti di Palermo, 1913).

ossia per la (12)

$$F_{k+\rho}(x\,,y)=\sum_{i,r,h=1}^{q_{k-3}} B_{h,r}^{(k)}\,B_{r,i}^{(k,\rho)}\,\varphi_i^{(k-2)}(x)\times$$

$$\times\left\{\frac{\psi_h(y)}{\lambda_h}+\sum_{\sigma=1}^{k-3}\sum_{\tau=1}^{q_{\sigma-1}-q_\sigma}\frac{\mu_{h,\tau}^{(k-3,k-\sigma-3)}}{\lambda_{q_\sigma+\tau}}\,\psi_{q_\sigma+\tau}(y)\right\},$$

e per le (11), (16)

$$F_{k+\rho}(x\,,y)=\sum_{i,h=1}^{q_{k-3}} B_{h,i}^{(k,\rho+1)}\,\varphi_i^{(k-2)}(x)\,\psi_h^{(k-2)}(y)\,;$$

cioè la (17) sussiste anche pel valore $\rho+1$.

Dunque considerando il nucleo $F_k(x\,,y)$ come una forma bilineare nelle $2q_{k-3}$ variabili $\varphi_i^{(k-2)}(x)$, $\psi_i^{(k-2)}(y)$, il nucleo $F_{k+\rho-1}(x\,,y)$ è la potenza ρ^{ma} del nucleo $F_k(x\,,y)$. L'equazione caratteristica del nucleo $F_k(x\,,y)$ è dunque

$$\Omega^{(k)}(s)\equiv\begin{vmatrix} B_{11}^{(k)}-s\,, & B_{12}^{(k)} & ,\dots & B_{1,q_{k-3}}^{(k)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{q_{k-3},1}^{(k)} & ,\,B_{q_{k-3},2}^{(k)} & ,\dots & B_{q_{k-3},q_{k-3}}^{(k)}-s \end{vmatrix}=$$
$$=b_1^{(k)}+b_2^{(k)}s+\cdots+b_{q_{k-3}+1}^{(k)}s^{q_{k-3}}=0\,;$$

e se $\chi^{(k)}(s)$ è il massimo comun divisore di tutti i minori di ordine $q_{k-3}-1$ del determinante $\Omega^{(k)}(s)$, e

$$\theta^{(k)}(s)=\frac{\Omega^{(k)}(s)}{\chi^{(k)}(s)}=a_1^{(k)}+a_2^{(k)}s+\cdots+a_\tau^{(k)}s^{\tau-1}\,,$$

l'equazione del minimo ordine cui soddisfa il nucleo $F(x\,,y)$ sarà

$$(18)\qquad a_1^{(k)}\,F_{k-1}(x\,,y)+a_2^{(k)}\,F_k(x\,,y)+\cdots+a_\tau^{(k)}\,F_{k+\tau-2}(x\,,y)=0\,.$$

Invece se $\chi^{(k)}(s)=1$ cioè se i divisori elementari del determinante $\Omega^{(k)}(s)$ sono potenze di basi tutte diverse fra loro, l'equazione del minimo ordine cui soddisfa il nucleo $F(x\,,y)$ è

$$b_1^{(k)}\,F_{k-1}(x\,,y)+b_2^{(k)}\,F_k(x\,,y)+\cdots+b_{q_{k-3}+1}^{(k)}\,F_{q_{k-3}+k-1}(x\,,y)=0\,;$$

ed essendo $q_1\leqq q-1$; $q_2\leqq q-2\,,\dots$ si avrà $q_{k-3}+k-1\leqq q+2$.

6. Si può facilmente vedere che quando ha luogo la (18), il nucleo $F_{k+\tau-3}(x\,,y)$ non differisce da una combinazione lineare omogenea a coeffi-

cienti costanti di $F_{k-2}, F_{k-1}, \dots F_{k+\tau-4}$ che per una soluzione $\Phi(x, y)$ comune alle equazioni

$$(19) \qquad \int_a^b F(x, s)\,\Phi(s, y)\,ds = 0 \quad ; \quad \int_a^b \Phi(x, s)\,F(s, y)\,ds = 0.$$

Per convincersene, basta notare che, essendo, per la (18),

$$F_{k+\tau-2}(x, y) = \sum_{i=1}^{\tau-1} \varrho_i\,F_{k+i-2}(x, y),$$

le funzioni

$$F_{k+\tau-3}(x, y)\,, \quad \sum_{i=1}^{\tau-1} \varrho_i\,F_{k+i-3}(x, y),$$

sono due soluzioni delle equazioni

$$\int_a^b F(x, s)\,k(s, y)\,ds = \int_a^b k(x, s)\,F(s, y)\,ds = F_{k+\tau-2}(x, y).$$

II. — Le funzioni permutabili col nucleo dato.

7. Abbiamo visto (Nota I) che quando il determinante D è diverso da zero, la funzione più generale permutabile col nucleo (1) è data da

$$K(x, y) = K_1(x, y) + \Phi(x, y),$$

ove $\Phi(x, y)$ è la soluzione generale comune alle equazioni (19) e

$$(20) \qquad K_1(x, y) = \sum_{i,h=1}^{n} a_{i,h}\,\varphi_i(x)\,\psi_h(y)$$

essendo le $a_{i,h}$ delle costanti che soddisfanno alle n^2 equazioni

$$(21) \qquad \lambda_i \sum_{r=1}^{n} A_{hr}\,a_{ir} - \lambda_h \sum_{r=1}^{n} A_{ri}\,a_{rh} = 0 \qquad (i, h = 1, \dots n).$$

Consideriamo ora le forme bilineari

$$A = \sum_{i,h=1}^{n} \frac{A_{h,i}}{\lambda_h}\,x_i\,y_h \quad ; \quad B = \sum_{i,h=1}^{n} \lambda_i\,a_{i,h}\,x_i\,y_h\,;$$

poichè

$$AB = \sum_{i,r,h=1}^{n} A_{ri}\,a_{rh}\,x_i y_h \quad ; \quad BA = \sum_{i,r,h=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_h}\,A_{hr}\,a_{ir}\,x_i y_h\,,$$

se le costanti $a_{i,h}$ soddisfanno alle (21) si ha $AB = BA$ e viceversa. Dunque la determinazione della funzione $K_1(x, y)$ si riduce alla determinazione delle forme bilineari B permutabili colla forma A; od anche, come ha notato il prof. Volterra, alla determinazione delle sostituzioni lineari

$$v_i = \lambda_i \sum_{r=1}^{n} a_{i,r}\, u_r \qquad (i = 1, \dots n)$$

permutabili colla sostituzione

$$v_i = \sum_{r=1}^{n} \frac{A_{ri}}{\lambda_r}\, u_r\,; \qquad (i = 1, \dots n),$$

ricerca questa compiuta dal sig. Voss e dai proff. Volterra e Nicoletti (¹).

8. Nel caso generale in cui non si faccia alcuna ipotesi nei coefficienti $A_{i,h}$, nel caso cioè in cui $D \neq 0$ ed i divisori elementari del determinante caratteristico $\Omega(s)$ (Nota III, § 3) sono potenze di basi tutte diverse fra loro, si può esprimere $K_1(x, y)$ per mezzo dei nuclei iterati del nucleo dato: come si può riconoscere partendo dalla formola data a pag. 568 della Nota I per i coefficienli $a_{i,h}$.

Ponendo per brevità di scrittura

$$\begin{vmatrix} A_{i_1 h_1} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{i_1 h_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{i_s h_1} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{i_s h_s} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} i_1, \dots i_s \\ h_1, \dots h_s \end{pmatrix},$$

$$H_s(x, y) = \sum_{i,h=1}^{n} \frac{\varphi_i(x)\, \psi_h(y)}{\lambda_i\, \lambda_h} \sum_{r_1 \dots r_s = 1}^{n} \frac{1}{\lambda_{r_1} \dots \lambda_{r_s}} \begin{pmatrix} h\, r_1 \dots r_s \\ i\, r_1 \dots r_s \end{pmatrix},$$

per la citata formola si ha

$$K_1(x, y) = c_1\, F(x, y) + \sum_{s=0}^{n-2} \sigma_s\, H_s(x, y),$$

essendo c_1 e le σ delle costanti arbitrarie.

Ora poichè

$$\begin{pmatrix} h\, r_1 \dots r_s \\ i\, r_1 \dots r_s \end{pmatrix} = A_{hi} \begin{pmatrix} r_1 \dots r_s \\ r_1 \dots r_s \end{pmatrix} - \sum_{\tau=1}^{s} A_{hr_\tau} \begin{pmatrix} r_\tau\, r_1 \dots r_{\tau-1}\, r_{\tau+1} \dots r_s \\ i\;\; r_1 \dots r_{\tau-1}\, r_{\tau+1} \dots r_s \end{pmatrix},$$

(¹) *Encyclopédie des sciences mathématiques* (Édition française), tomo I, vol. 2°, fasc. 4-5, pp. 517 e seg.

sarà

$$\sum_{r_1..r_s=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{r_1} \dots \lambda_{r_s}} \begin{pmatrix} h\, r_1 \dots r_s \\ i\, r_1 \dots r_s \end{pmatrix} = \varrho_{s,0}\, A_{hi} -$$

$$- s \sum_{\tau=1}^{n} \frac{A_{h\tau}}{\lambda_\tau} \sum_{r_1..r_{s-1}=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{r_1} \dots \lambda_{r_{s-1}}} \begin{pmatrix} \tau\, r_1 \dots r_{s-1} \\ i\, r_1 \dots r_{s-1} \end{pmatrix},$$

essendo $\varrho_{s,0}$ una costante indipendente dagli indici i, h. Analogamente si ha

$$\sum_{r_1..r_{s-1}=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{r_1} \dots \lambda_{r_{s-1}}} \begin{pmatrix} \tau\, r_1 \dots r_{s-1} \\ i\, r_1 \dots r_{s-1} \end{pmatrix} = - \frac{\varrho_{s,1}}{s} A_{\tau i} -$$

$$-(s-1) \sum_{\tau_1=1}^{n} \frac{A_{\tau\tau_1}}{\lambda_{\tau_1}} \sum_{r_1..r_{s-2}=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{r_1} \dots \lambda_{r_{s-2}}} \begin{pmatrix} \tau\, r_1 \dots r_{s-2} \\ i\, r_1 \dots r_{s-2} \end{pmatrix};$$

quindi per le (2) della Nota III

$$\sum_{r_1..r_s=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{r_1} \dots \lambda_{r_s}} \begin{pmatrix} h\, r_1 \dots r_s \\ i\, r_1 \dots r_s \end{pmatrix} = \varrho_{s,0}\, A^{(2)}_{h,i} + \varrho_{s,1}\, A^{(3)}_{h,i} +$$

$$+ s(s-1) \sum_{\tau=1}^{n} \frac{A^{(3)}_{h\tau}}{\lambda_\tau} \sum_{r_1..r_{s-2}=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{r_1} \dots \lambda_{r_{s-2}}} \begin{pmatrix} \tau\, r_1 \dots r_{s-2} \\ i\, r_1 \dots r_{s-2} \end{pmatrix},$$

e continuando nello stesso modo si trova

$$\sum_{r_1..r_s=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{r_1} \dots \lambda_{r_s}} \begin{pmatrix} h\, r_1 \dots r_s \\ i\, r_1 \dots r_s \end{pmatrix} = \varrho_{s,0}\, A^{(2)}_{h,i} + \varrho_{s,1}\, A^{(3)}_{h,i} + \cdots + \varrho_{s,s}\, A^{(s+2)}_{h,i},$$

denotando con $\varrho_{s,\tau}$ delle costanti indipendenti dagli indici i, h.

Abbiamo perciò

$$H_s(x, y) = \sum_{r=1}^{s} \varrho_{s,r}\, F_{r+2}(x, y) \qquad (s = 0, 1, \dots n-2),$$

ed infine

$$K_1(x, y) = c_1 F(x, y) + c_2 F_2(x, y) + \cdots + c_n F_n(x, y),$$

essendo le c delle costanti arbitrarie. Dunque *nel caso generale in cui* $D \neq 0$ *ed i divisori elementari del determinante caratteristico* $\Omega(s)$ *sono potenze di basi tutte diverse fra loro la funzione più generale della forma* (20) *permutabile col nucleo dato* (1) *è una combinazione lineare omogenea* *a coefficienti costanti del nucleo stesso e dei suoi nuclei iterati dei primi n ordini; nuclei che sono fra loro linearmente indipendenti* [1]. *Ed in tal caso* (*anzi solo in tal caso*) *tutte le funzioni della forma* (20) *permutabili col nucleo dato* (1) *sono permutabili fra loro*, come ha notato il professore Volterra.

9. Supponiamo da ultimo che il determinante D sia nullo. In tal caso (Nota II) la funzione più generale permutabile col nucleo dato (1) si ottiene aggiungendo alla soluzione generale $\Phi(x, y)$ comune alle (19) una soluzione delle equazioni

$$\int_a^b \mathrm{F}(x, s)\, \mathrm{K}(s, y)\, ds = \int_a^b \mathrm{K}(x, s)\, \mathrm{F}(s, y)\, ds = \mathrm{K}_1(x, y), \tag{22}$$

essendo ancora la $\mathrm{K}_1(x, y)$ definita dalla (20) i cui coefficienti $a_{i,h}$ soddisfanno alle (21). Anche in tal caso siamo dunque condotti alla ricerca delle forme bilineari B permutabili colla forma A che ha però il determinante nullo.

Supposti ora noti i coefficienti $a_{i,h}$ la soluzione generale dell'equazione

$$\int_a^b \mathrm{F}(x, s)\, \mathrm{K}_2(s, y)\, ds = \mathrm{K}_1(x, y),$$

si ha prendendo

$$\mathrm{K}_2(x, y) = \sum_{i,h=1}^{n} \lambda_i\, a_{i,h}\, \psi_i(x)\, \psi_h(y) + \omega(x, y) - \\ - \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x) \int_a^b \psi_i(s)\, \omega(s, y)\, ds\,;$$

mentre la soluzione generale dell'equazione

$$\int_a^b \mathrm{K}_3(x, s)\, \mathrm{F}(s, y)\, ds = \mathrm{K}_1(x, y)$$

è data da

$$\mathrm{K}_3(x, y) = \sum_{i,h=1}^{n} \lambda_h\, a_{i,h}\, \varphi_i(x)\, \varphi_h(y) + \theta(x, y) - \\ - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(y) \int_a^b \theta(x, t)\, \varphi_i(t)\, dt\,.$$

[1] Cecioni, *Sopra alcune operazioni algebriche sulle matrici*. Annali della Scuola normale superiore di Pisa, vol. 11, pag. 48 (1909).

Le $\omega(x, y)$, $\theta(x, y)$ che figurano nelle formole precedenti sono due funzioni arbitrarie integrabili nel campo (a, b).

E poichè le costanti $a_{i,h}$ soddisfanno alle (21), prendendo

$$\omega(x, y) = \sum_{i,h=1}^{n} \lambda_h\, a_{i,h}\, \varphi_i(x)\, \varphi_h(y) \;;\; \theta(x, y) = \sum_{i,h=1}^{n} \lambda_i\, a_{i,h}\, \psi_i(x)\, \psi_h(y),$$

si ha $K_2(x, y) = K_3(x, y)$. Dunque nel caso che consideriamo la funzione più generale permutabile col nucleo dato (1) è

$$K(x, y) = \sum_{i,h=1}^{n} a_{i,h} \{\lambda_h\, \varphi_i(x)\, \varphi_h(y) + \lambda_i\, \psi_i(x)\, \psi_h(y)\} -$$
$$- \sum_{i,r,h=1}^{n} \lambda_i\, A_{hr}\, a_{ir}\, \psi_i(x)\, \varphi_h(y) + \Phi(x, y),$$

essendo al solito $\Phi(x, y)$ la soluzione generale comune alle (19).

Matematica. — *Sur les fonctions permutables de 2ième espèce.* Nota di J. SOULA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Geografia fisica. — *Piano generale di una spedizione scientifica nel Karakoram orientale coll'intento di esplorare e rilevare la porzione tuttora ignorata della catena e di compiere osservazioni sistematiche nei varii rami della fisica terrestre.* Nota del dott. FILIPPO DE FILIPPI, presentata dal Socio P. BLASERNA [1].

L'idea di questo piano di spedizione, germogliata nella mia mente durante la campagna di S. A. R. il Duca degli Abruzzi nel bacino del ghiacciaio Baltoro, maturò poi e prese consistenza e forma nel corso delle letture che dovetti fare per la preparazione della Relazione della detta campagna.

Non v'è forse altra regione della terra che offra allo studioso problemi così varî e così importanti, e non v'è alcun dubbio che una spedizione specialmente preparata ed organizzata per ricerche scientifiche riporterebbe una ampia messe di prezioso materiale per lo studio della fisica terrestre.

Nel concetto del piano qui sotto esposto, scopo principale della spedizione sono le ricerche di fisica terrestre; scopo accessorio e secondario è la

[1] Cfr. Rend. cl. sc. fis. mat. e nat. Seduta 5 gennaio 1913.