

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

alcuni tipi, perfino con quelli tuttavia viventi nel Mediterraneo, più che nel Pacifico e nell'Atlantico. Essi sono di mare poco profondo e mostrano l'uniformità del mare Cretaceo d'allora fino alla estrema India orientale ed alla Europa meridionale con strette affinità pur fino agli estremi settentrionali di Europa, ed un po' meno con gli estremi meridionali d'Africa. Affinità minori ma sicure aveva quel mare Indo-Libico-Europeo coi mari Nord e Sud Americani, affinità che probabilmente avevano luogo per comunicazioni di piattaforme continentali dalla parte Eurasiatica d'Oriente, piuttosto che dal lato di occidente attraverso mari Atlantici più profondi. Notizie minerarie e stratigrafiche maggiori potranno essere date in seguito.

Meccanica — Integro per l'equazione differenziale dell'odografo relativo al movimento di un proiettile in un mezzo comunque resistente. Nota del Corrisp. E. PASCAL.

È un problema celebre della Meccanica classica, e che interessa specialmente i cultori di Balistica, quello della determinazione del movimento di un proiettile in un mezzo che resiste con una legge qualunque.

Con i principii elementari della meccanica si giunge facilmente a stabilire l'equazione differenziale *intrinseca* del movimento (la cosiddetta equazione differenziale dell'*odografo*), cioè la relazione differenziale fra l'angolo α di inclinazione all'orizzonte, e la velocità del mobile, ma, stabilita questa equazione, si vide sin dai tempi di D'Alembert, che essa non potea integrarsi, se non ricorrendo a speciali forme della legge di resistenza. E così prima D'Alembert ⁽¹⁾, ed in epoca recente Siacci ⁽²⁾, Appell ⁽³⁾, Ouyvet ⁽⁴⁾, ecc. cercarono i cosiddetti casi di integrabilità, cioè quelle leggi di resistenza per le quali l'equazione dell'odografo può ridursi alle quadrature.

Ma l'equazione generale è rimasta sempre insoluta.

Lo strumento che ho oggi l'onore di presentare all'Accademia e che è stato costruito, sulle mie indicazioni, a Napoli dal valente meccanico del R. Osservatorio astronomico, sig. Pasquale Moreno, risolve graficamente il problema nella sua generalità; la legge di resistenza è rappresentata da una curva che si traccia arbitrariamente.

⁽¹⁾ J. L. D'Alembert, *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, Paris, 1744, pag. 359.

⁽²⁾ F. Siacci, *Comptes Rendus de l'Acad. des sciences de Paris*, tom. 132 (1901), pag. 1175; tom. 133 (1901), pag. 381.

⁽³⁾ P. A. Appell, *Archiv der Mathem. und Physik* (3), v. 5 (1903), pag. 177.

⁽⁴⁾ E. Ouyvet, *Comptes Rendus de l'Acad. des sciences de Paris*, tom. 150 (1910), pag. 1229. Vedi anche T. Hayashi, *Sur l'équation différentielle du mouvement d'un projectile sphérique pesant dans l'air*, *Giorn. di Matematiche di Battaglini* (3), tom. 49 (1911), pag. 231.

Il che è tanto più notevole, anche per la pratica balistica e per lo studio del problema degli aeroplani, inquantochè in tal modo noi possiamo servirci di una *legge sperimentale*, il cui diagramma sia stato costruito *per punti* mediante opportune esperienze, e ottenere così un risultato che risponda esattamente alla realtà fisica. Si può perciò fare a meno della *analiticità* della legge di resistenza, la quale potrà così anche non essere esprimibile con una funzione analitica.

Tentativi a tale scopo non sono mancati, e in un libro ⁽¹⁾ recente di L. Jacob, ingegnere generale dell'artiglieria navale francese, è accennato ad uno strumento di tale specie ma fondato su altri principii. Dopo aver detto che l'apparecchio era in costruzione nell'officina di esperienze di marina a Gavres, e che se ne preventivava il costo nientemeno che in 6000 lire (il mio apparecchio non costa neanche la dodicesima parte), l'A. però finisce col dire che gli è impossibile il dare una descrizione completa dell'apparecchio. Sembra perciò che la cosa sia stata da lui concepita da punti di vista piuttosto complicati.

* * *

L'equazione *intrinseca* del movimento del proiettile (equazione dell'*odografo*) è la seguente:

$$(1) \quad \frac{dv}{d\alpha} = \frac{v[\operatorname{sen} \alpha + \psi(v)]}{\cos \alpha},$$

dove v è la velocità, α è l'angolo di inclinazione all'orizzonte, $\psi(v)$ è una funzione della velocità, che rappresenta la resistenza del mezzo, divisa per l'accelerazione di gravità g .

Per il nostro scopo ci conviene di operare la trasformazione ⁽²⁾:

$$(2) \quad v = e^x, \quad \operatorname{sen} \alpha = -y,$$

cosicchè la equazione dell'odografo diventa

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1-y^2}{f(x)-y},$$

dove

$$(4) \quad f(x) = \psi(e^x).$$

Ora l'integrafo per l'equazione (3) lo costruiamo facilmente fondandolo sul principio solito della rotella girante (v. fig. 1). Immaginiamo il solito rettangolo di acciaio (fig. 2) scorrevole sulle due ruote uguali M, N, nel senso dell'asse delle x , e portante scorrevoli sui suoi due lati paralleli, i due carrelli H (carrello differenziale), G (carrello integrale). Al carrello G sia

⁽¹⁾ L. Jacob, *Le calcul mécanique*, Paris, Doin, 1911, cap. V.

⁽²⁾ È la trasformazione adoperata da Hayashi, op. cit.

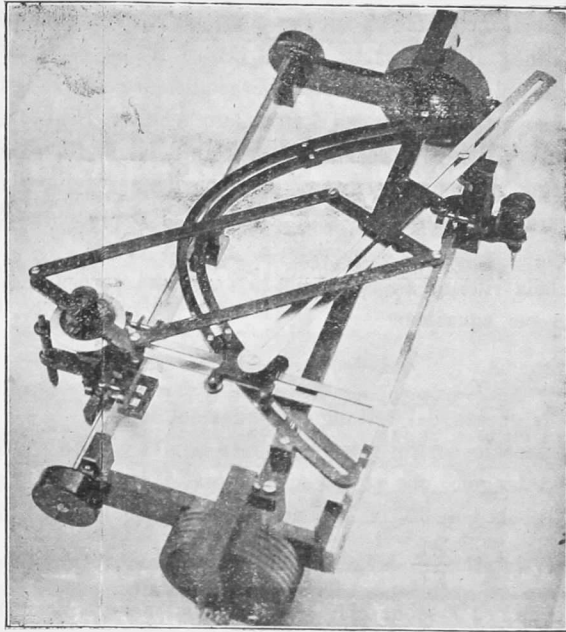


FIG. 1.

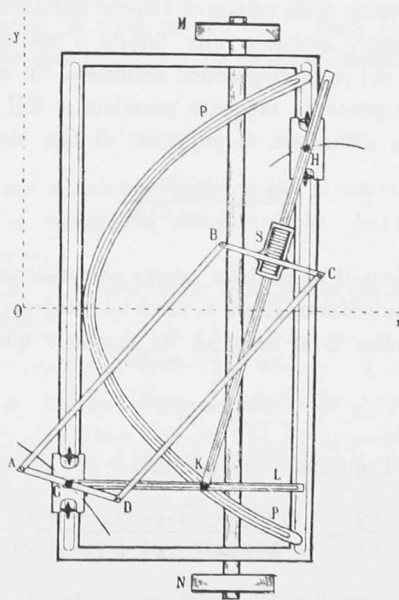


FIG. 2.

connessa rigidamente un'asta scanalata GL, parallela all'asse delle x , e su questa e su di una parabola anch'essa scanalata PP sia mobile il perno K dell'asta rettilinea HK passante per il centro H del carrello differenziale e scorrevole in un manicotto S fissato perpendicolarmente al lato BC di un parallelogrammo articolato, di cui l'altro lato AD sia fissato col suo punto medio al centro G del carrello integrale portante la rotella girante. Un opportuno congegno permette di fissare il piano della rotella girante con un angolo arbitrario alla direzione AD, e quindi alla direzione KH a questa perpendicolare.

La parabola riferita all'asse delle x e all'asse perpendicolare passante per H, abbia per equazione

$$x = 1 - y^2,$$

essendo 1 la larghezza del rettangolo fondamentale.

Nell'apparecchio costruito, si è assunta l'unità eguale a 15 cm., e così l'altezza del rettangolo, che corrisponde, come si vede, alla massima apertura della parabola è di 30 cm. Dal triangolo rettangolo HKL avendosi che il rapporto dei cateti $\frac{HL}{KL}$ è la tangente dell'angolo di inclinazione di KH sull'asse delle x , ed essendo HL eguale evidentemente alla differenza delle ordinate delle curve descritte dai punti H e G, ordinate che indichiamo con $f(x)$ e y , e KL eguale ad $1 - y^2$ (ascissa del punto della parabola) ne viene che se il piano della rotella si dispone parallelamente a KH, cioè se si pone a 0° l'indice connesso alla rotella e che scorre sul quadrante connesso al lato AD del parallelogrammo articolato, la curva descritta dalla rotella avrà in ogni punto la tangente parallela a KH, e cioè la derivata dell'ordinata rispetto all'ascissa di un punto di tale curva sarà

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x) - y}{1 - y^2}.$$

Ma se invece si dispone il piano della rotella perpendicolare a KH, cioè se si pone a 90° l'indice suindicato, allora si verrà ad integrare precisamente la (3).

Se lo stesso indice lo si fissa ad un angolo θ qualunque, la cui tangente sia m ,

$$(6) \quad m = \operatorname{tg} \theta,$$

verrà ad integrarsi l'equazione più generale

$$(7) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(f(x) - y) + m(1 - y^2)}{-m(f(x) - y) + (1 - y^2)},$$

ma di questa, a noi per il nostro scopo, non serve che solo il caso speciale di $m = \infty$.

A compendiare in poche parole la costruzione del nostro apparecchio possiamo dire che esso non è altro che una specie di integrafo di Abakanowicz, in cui però invece di fare che il perno sia fisso in un punto, si fa che questo perno si muova, in corrispondenza al movimento del carrello integrale, su di una parabola.

Se poi, invece che su di una parabola, tal perno lo si fa scorrere su di un'altra curva di equazione

$$x = \Phi(y)$$

connessa rigidamente al rettangolo fondamentale dell'apparecchio, si ha l'integrazione di ogni equazione del tipo

$$(8) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x) - y}{\Phi(y)},$$

ovvero (ponendo, come sopra, il piano della rotella in modo da fare un angolo θ con KH)

$$(9) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(f(x) - y) + m\Phi(y)}{-m(f(x) - y) + \Phi(y)},$$

dove $\Phi(y)$ è l'ascissa di una curva secondo cui è foggiate un'asta scanalata di ottone connessa rigidamente allo strumento, ed $f(x)$ è l'ordinata di una curva arbitraria disegnata sul foglio da disegno, e sulla quale si fa scorrere la punta del carrello differenziale.

Tutti gli integrafi di tale specie, fra i quali è compreso quello per l'equazione del movimento dei proiettili, possono chiamarsi *integrafi a perno mobile*.

* * *

A completare ora quanto abbiamo detto di sopra, mostriamo come si può, tracciata che lo strumento abbia la curva dell'odografo, costruire la curva della *traiettoria*.

Indicando con X, Y le coordinate di un punto della traiettoria, si hanno, come si sa, le formole

$$(10) \quad \begin{cases} g \cdot dX = -v^2 d\alpha \\ g \cdot dY = -v^2 \operatorname{tg} \alpha \cdot d\alpha, \end{cases}$$

da cui colle apposizioni (2) si hanno le altre:

$$(11) \quad \begin{cases} gX = \int \frac{e^{2x} dy}{\sqrt{1-y^2}} \\ Y = -\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dX \end{cases}$$

dove nella prima, x e y si intendono legati dall'equazione dell'odografo

$$(12) \quad y = F(x) \quad \text{ovvero} \quad x = F_1(y),$$

e nella seconda y e X si intendono legati dall'equazione ottenuta colla integrazione della prima cioè da

$$(13) \quad gX = \varphi(y), \quad \text{ovvero} \quad y = \varphi_1(gX).$$

Cosicchè le (11) sono equivalenti a

$$(14) \quad \begin{cases} gX = \int \frac{e^{2F_1(y)} dy}{\sqrt{1 - F_1^2(y)}} \\ gY = - \int \frac{\varphi_1(gX)}{\sqrt{1 + \varphi_1^2(gX)}} d(gX). \end{cases}$$

L'integrale della seconda è l'equazione della traiettoria

$$(15) \quad gY = \omega(gX)$$

ovvero anche

$$(16) \quad Y_1 = \omega(X_1).$$

Ciò posto sia data (v. fig. 3) la curva $r = f(x)$ della resistenza, e mediante lo strumento deduciamone l'odografo $y = F(x)$.

Sul medesimo foglio di disegno tracciamo la curva esponenziale servendoci dell'integrafo per equazioni differenziali lineari da me costruito e illustrato in parecchi lavori precedenti ⁽¹⁾, e sia essa la curva AE; sia OE = 1 = 15 cm.

Dalla curva F possiamo dedurre per punti la curva di ordinata

$$z = \frac{e^{2F_1(y)}}{\sqrt{1 - F_1^2(y)}}$$

procedendo nel seguente modo:

Tracciate da un punto a di F le due coordinate aB , aC , si raddoppi OC in D, e si trovi la corrispondente ordinata DA della curva esponenziale, e indi si riporti A in M con una retta parallela ad x . Con centro B e con un'apertura di compasso eguale ad 1, cioè a 15 cm., si segni il punto N, in modo che sarà $ON = \sqrt{1 - y^2}$, essendo $OB = y$.

Si congiunga NM, e da F, tale che sia $OF = OE = 1 = 15$ cm., si conduca la parallela FP a NM. Con un arco di cerchio di centro O si ri-

⁽¹⁾ E. Pascal, *L'integratore meccanico per le equazioni differenziali lineari di 1° ordine e per altre equazioni differenziali* (Rend. Accad. Lincei (5), tom. 18, 1909, 2° sem.; Giorn. di Batt. (3), tom. 48, 1910); *L'uso e le applicazioni dell'integratore meccanico per equazioni differenziali* (Giorn. di Batt. (3), tom. 49, 1911).

porti B in Q, e il punto a' di coordinate OP, OQ, sarà il richiesto punto trasformato di a . In tal modo possiamo costruire per punti la curva di equazione

$$z = \varphi'(y),$$

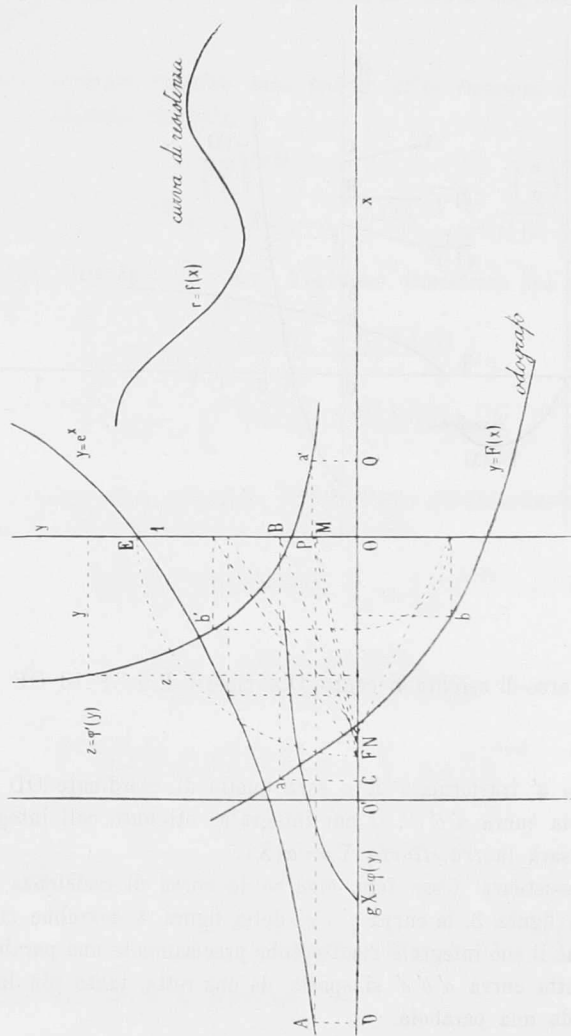


Fig. 3.

per la quale l'antico asse delle x figura ora come asse delle y , e l'antico asse delle y , come asse delle z .

Coll'integrato per le quadrature di Abdank-Abakanowicz integriamo questa curva e otteniamo la curva di equazione

$$gX = \varphi(y).$$

Ciò fatto passiamo all'altra figura (v. fig. 4).
 Da un punto a di quest'ultima curva, tracciate le due coordinate aB , aC , si riporti B in D con un arco di cerchio di centro O . Indi con centro C si faccia $CH = OK = 1 = 15$ cm. e da K si conduca KE parallela a HC .

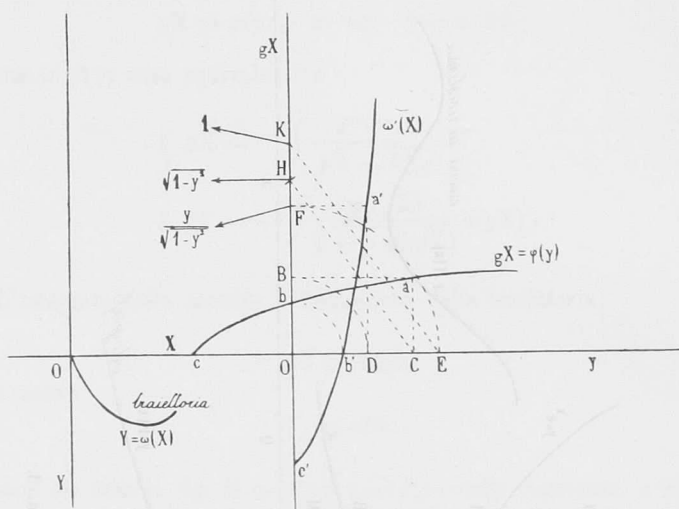


FIG. 4.

Con un arco di cerchio di centro O si riporti E in F ed OF sarà eguale a $\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$.

Il punto a' trasformato di a sarà quello di coordinate OD , OF , e si otterrà così la curva $a'b'c'$, il cui integrale, ottenuto coll'integrafo per le quadrature, sarà la *traiettoria* $Y = \omega(X)$.

Se la resistenza fosse zero, cioè se la curva di resistenza fosse l'asse delle x della figura 3, la curva $a'b'c'$ della figura 4 dovrebbe risultare una retta, cosicchè il suo integrale risulterebbe precisamente una parabola. Quanto più la predetta curva $a'b'c'$ si sposta da una retta, tanto più la traiettoria si sposterà da una parabola.