ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Meccanica. — *Sulla integrazione dell'equazione delle onde smorzate col metodo delle caratteristiche.* Nota del Corrispondente O. Tedone.

1. *Alcune formole relative alla teoria delle funzioni di Bessel.* — Poniamo, con notazione abituale,

$$(1)\qquad J_n(x) = \sum_0^\infty {}_i (-1)^i \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2i}}{i!\,(n+i)!}\ ,\quad I_n(x) = \sum_0^\infty {}_i \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2i}}{i!\,(n+i)!}\ ,$$

n essendo quindi un numero intero. Vogliamo dimostrare che sussistono le due formole:

$$(2)\qquad \begin{cases} J_1(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{J_0[x(1-t)]\,J_1(xt)}{t}\,dt\ , \\[2ex] I_1(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{I_0[x(1-t)]\,I_1(xt)}{t}\,dt\ , \end{cases}$$

di cui una è conseguenza dell'altra. Consideriamo perciò soltanto la seconda che è quella che noi adopereremo e notiamo che

$$\frac{I_0[x(1-t)]\,I_1(xt)}{t} = \sum_0^\infty {}_i\, A_i \left(\frac{x}{2}\right)^{1+2i}$$

con

$$A_i = \sum_0^i {}_j \frac{(1-t)^{2j}\,t^{2i-2j}}{j!\,j!\,(i-j)!\,(i-j+1)!}\ ,$$

per cui

$$\int_0^1 \frac{I_0[x(1-t)]\,I_1(xt)}{t}\,dt = \sum_0^\infty {}_i\, B_i \left(\frac{x}{2}\right)^{1+2i}$$

con

$$(3)\qquad B_i = \frac{1}{(2i+1)!} \sum_0^i {}_j \frac{1}{i-j+1} \binom{2j}{j} \binom{2i-2j}{i-j} = \frac{1}{(2i+1)!} \sum_0^i {}_j \frac{1}{j+1} \binom{2j}{j} \binom{2i-2j}{i-j}.$$

Le (2) saranno dimostrate se proviamo che

$$(3')\qquad B_i = \frac{1}{i!\,(i+1)!}$$

il che equivale a dimostrare la notevole identità numerica

$$(4)\qquad \binom{2i+1}{i} = \sum_0^i {}_j \frac{1}{j+1} \binom{2j}{j} \binom{2i-2j}{i-j}.$$

A questo scopo, teniamo conto che $B_0 = 1$ e che, in conseguenza delle due espressioni (3) di B_i, è

$$B_i - \frac{1}{i(i+1)} B_{i-1} = - \frac{1}{i(i+1)(2i+1)} B_{i-1} + \frac{1}{(2i+1)\, i!\, (i+1)!}$$

ossia

$$B_i - \frac{2}{(i+1)(2i+1)} B_{i-1} = \frac{1}{(2i+1)\, i!\, (i+1)!}. \tag{5}$$

Queste equazioni (5) sono soddisfatte dai valori (3′) delle B_i e fissato il valore di $B_0 = 1$, non ammettono alcun'altra soluzione. Dunque ecc.

2. *Inversione di alcuni integrali.* — Trascurando di occuparci della prima delle (2) dalla quale, del resto, si ricavano analoghe conseguenze che dalla seconda, osserviamo che a quest'ultima si può dare la forma

$$I_1(x_1 - x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{I_0(x_1 - x)\, I_1(x_0 - x)}{x_0 - x}\, dx \tag{2′}$$

e mostra subito, con l'aiuto della nota formola d'inversione d'integrali di Dirichlet, che le due equazioni:

$$\Phi(x_0) - \Phi(0) = \int_0^{x_0} \varphi(x)\, I_0(x_0 - x)\, dx \tag{6}$$

$$\varphi(x_0) = \Phi'(x_0) - \int_0^{x_0} [\Phi(x) - \Phi(0)]\, \frac{I_1(x_0 - x)}{x_0 - x}\, dx \tag{7}$$

sono l'una conseguenza dell'altra. Ciascuna di esse è un'equazione integrale di cui l'altra offre la soluzione.

Proponiamoci ora di trovare la funzione $\varphi(x)$ che soddisfa all'equazione

$$\Phi(x_0) = \int_0^{x_0} \varphi(x)\, I_1(x_0 - x)\, dx \tag{8}$$

in cui, per semplicità, abbiamo, senz'altro, indicato con $\Phi(x_0)$ una funzione nota che si annulla per $x_0 = 0$ insieme alla derivata prima. Perciò integriamo, una volta, l'equazione (8), rispetto ad x_0 da 0 ad x_0 ed un'altra volta, deriviamola rispetto alla stessa variabile. Si trovano così le due equazioni:

$$\int_0^{x_0} \varphi(x)\, I_0(x_0 - x)\, dx - \int_0^{x_0} \varphi(x)\, dx = \int_0^{x_0} \Phi(x)\, dx\,, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \Phi'(x_0) &= \int_0^{x_0} \varphi(x)\, I_1'(x_0 - x)\, dx = \\ &= \int_0^{x_0} \varphi(x) \left[I_0(x_0 - x) - \frac{I_1(x_0 - x)}{x_0 - x} \right] dx\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Da queste due equazioni si ottiene l'altra

$$\int_0^{x_0} \varphi(x) \frac{I_1(x_0 - x)}{x_0 - x} dx - \int_0^{x_0} \varphi(x)\, dx = \int_0^{x_0} \Phi(x)\, dx - \Phi'(x_0)$$

la quale, moltiplicata per $I_0(x_1 - x_0)\, dx_0$ ed integrata, rispetto ad x_0, fra 0 ed x_1, ci dà

$$\int_0^{x_1} \varphi(x)\, I_1(x_1 - x)\, dx - \int_0^{x_1} I_0(x_1 - x_0)\, dx_0 \int_0^{x_0} \varphi(x)\, dx =$$

$$= \int_0^{x_1} I_0(x_1 - x_0)\, dx_0 \left[\int_0^{x_0} \Phi(x)\, dx - \Phi'(x_0)\right] =$$

$$= - \Phi(x_1) + \int_0^{x_1} \Phi(x)\, dx \left[\int_x^{x_1} I_0(x_1 - x_0)\, dx_0 - I_1(x_1 - x)\right].$$

E questa equazione con l'aiuto della data (8), diventa

$$\int_0^{x_1} I_0(x_1 - x_0)\, dx_0 \int_0^{x_0} \varphi(x)\, dx = 2\,\Phi(x_1) + \tag{11}$$

$$+ \int_0^{x_1} \Phi(x)\, dx \left[I_1(x_1 - x) - \int_x^{x_1} I_0(x_1 - x_0)\, dx_0\right].$$

Essa è dello stesso tipo della (6): e possiamo avere, quindi, facilmente, prima $\int_0^{x_1} \varphi(x)\, dx$ e poi $\varphi(x_1)$. Si ottiene la funzione $\varphi(x)$, per via più semplice, osservando che, a causa della (9),

$$\frac{d}{dx_1} \int_0^{x_1} I_0(x_1 - x_0)\, dx_0 \int_0^{x_0} \varphi(x)\, dx = \frac{d}{dx_1} \int_0^{x_1} \varphi(x)\, dx \int_x^{x_1} I_0(x_1 - x_0)\, dx_0 =$$

$$= \int_0^{x_1} \varphi(x)\, I_0(x_1 - x)\, dx = \int_0^{x_1} \varphi(x)\, dx + \int_0^{x_1} \Phi(x)\, dx.$$

Basta, perciò, derivare la (11) due volte rispetto ad x_1 per avere

$$\varphi(x_1) = - \Phi(x_1) + 2\Phi''(x_1) - \frac{d}{dx_1} \int_0^{x_1} \Phi(x) \frac{I_1(x_1 - x)}{x_1 - x} dx. \tag{12}$$

3. *Integrazione dell'equazione delle onde smorzate.* — L'equazione delle onde smorzate è l'equazione

$$c^2 \Delta^2 \psi = \alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{13}$$

con c^2, α^2 e β costanti positive; ed è l'equazione che regge la propagazione delle onde in un mezzo dispersivo. La difficoltà sostanziale della integrazione della (13) col metodo delle caratteristiche consiste nell'inversione di un certo integrale, precisamente nell'inversione di un integrale del tipo (8), e che fin'ora era stata conseguita ricorrendo ai teoremi più generali come quelli del Volterra. Noi parliamo dell'equazione delle onde smorzate perchè questa è la più rappresentativa del suo tipo. In effetti, contemporaneamente alla (13), noi eseguiamo l'integrazione di ogni equazione lineare a coefficienti costanti che contiene le derivate seconde come la (13), ma che può contenere anche tutte le derivate prime e la funzione incognita.

Ponendo, nella (13), $\psi = e^{-\frac{\beta}{\alpha^2}t}\varphi$, e cambiando proporzionalmente x, y, z, t, possiamo ridurre la (13) alla forma

$$\Delta^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \varphi = 0 . \tag{14}$$

È di questa equazione che ora noi vogliamo occuparci. Se indichiamo con Σ una varietà regolare e chiusa nello spazio lineare a quattro dimensioni (x, y, z, t) e poniamo

$$D\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos ny + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos nz - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\cos nt , \tag{15}$$

per cui $D\varphi$ è il simbolo di derivata conormale a Σ, ossia della derivata nella direzione simmetrica alla direzione normale (interna) a Σ rispetto all'asse t, secondo la notevole denominazione ed osservazione del d'Adhémar, vale il teorema di reciprocità, per la (14), nello spazio ricordato (x, y, z, t),

$$\int_\Sigma [\varphi' D\varphi - \varphi D\varphi'] \, d\Sigma = 0 , \tag{16}$$

in cui φ e φ' sono due integrali della (14) regolari nell'interno e sulla varietà Σ.

Sia ora Σ una varietà regolare aperta che sia incontrata in un punto solo da ogni parallela all'asse t quando non si riduca ad una porzione di varietà cilindrica con le generatrici parallele allo stesso asse. Consideriamo quindi una porzione S'_4 dello spazio (x, y, z, t) limitata dalla varietà conica C:

$$a(t_1 - t) = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} = r ,$$

dove x_1, y_1, z_1, t_1 sono le coordinate di un punto fisso, dalla varietà cilindrica c:

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 = \varepsilon^2 ,$$

ε essendo una quantità che poi faremo tendere a zero e da una porzione di Σ; e supponiamo, per fissare le idee, che in S'_4 sia $t_1 \geq t$. Applicando la (16) in questa regione, nell'ipotesi che φ sia un integrale della (14) regolare in tutta la regione S_4 che si ottiene da S'_4 facendo tendere ε a zero, mentre

$$(17)\qquad \varphi' = \left(\frac{t_1 - t}{r} - 1\right) \frac{I_1\left[\sqrt{(t_1 - t)^2 - r^2}\right]}{\sqrt{(t_1 - t)^2 - r^2}},$$

al limite, si ottiene subito la formola

$$(18)\qquad 4\pi \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x_1, y_1, z_1, t)\, I_1(t_1 - t)\, dt = \int_{\Sigma} [\varphi\, D\varphi' - \varphi'\, D\varphi]\, d\Sigma,$$

t_0 indicando il valore di t nel punto d'incontro di Σ con la retta $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ del nostro spazio a quattro dimensioni. Essendo la (18) del tipo della (8), basta applicare la formola (12), per ottenere $\varphi(x_1, y_1, z_1, t_1)$. Si trova così

$$(19)\qquad \varphi(x_1, y_1, z_1, t_1) = -\Phi + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t_1^2} - \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{t_0}^{t_1} \Phi \frac{I_1(t_1 - t)}{t_1 - t}\, dt,$$

dove Φ ora rappresenta il secondo membro di (18) diviso per 4π.

Chimica. — *Paranitroaniline ortoalogenate e loro derivati.* Nota del Socio G. Körner e del dott. Contardi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Flusso di energia e velocità di gruppo.* Nota di Maria Ferrari, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Il Reynolds, prendendone il concetto da Stokes, considerò [1] e determinò in modo preciso il flusso di energia meccanica dovuto a treni d'onde propagantesi, con velocità poco diverse, in un liquido infinitamente profondo; e chiamò *velocità di gruppo* quella corrispondente a tale flusso.

Lord Rayleigh rilevò poi [2] il significato cinematico della velocità di gruppo, ed estese l'indagine di Reynolds, stabilendo che, per tutte le onde irrotazionali, in un canale di qualsiasi profondità, la velocità con cui si propaga l'energia sempre coincide colla velocità di gruppo.

Egli raggiunse questo risultato mediante indipendente e diretto calcolo della energia e del suo flusso da un lato, della velocità di gruppo dall'altro.

[1] *On the rate of progression of groups of waves and the rate at which energy is transmithed by waves*, Sc. Papers, vol. I, 1869-1882 (Nature, 1877).

[2] Theory of Sound, 1877; *On progressive waves*, Sc. Paper, vol. I (1869-1881) (Proc. Lond. Math. Soc., 1877).