ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

regolare in tutta la regione S_4 che si ottiene da S'_4 facendo tendere ε a zero, mentre

$$(17) \qquad \varphi' = \left(\frac{t_1 - t}{r} - 1\right) \frac{I_1\left[\sqrt{(t_1 - t)^2 - r^2}\right]}{\sqrt{(t_1 - t)^2 - r^2}},$$

al limite, si ottiene subito la formola

$$(18) \qquad 4\pi \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x_1, y_1, z_1, t)\, I_1(t_1 - t)\, dt = \int_{\Sigma} [\varphi\, D\varphi' - \varphi'\, D\varphi]\, d\Sigma,$$

t_0 indicando il valore di t nel punto d'incontro di Σ con la retta $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ del nostro spazio a quattro dimensioni. Essendo la (18) del tipo della (8), basta applicare la formola (12), per ottenere $\varphi(x_1, y_1, z_1, t_1)$. Si trova così

$$(19) \qquad \varphi(x_1, y_1, z_1, t_1) = -\Phi + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t_1^2} - \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{t_0}^{t_1} \Phi\, \frac{I_1(t_1 - t)}{t_1 - t}\, dt,$$

dove Φ ora rappresenta il secondo membro di (18) diviso per 4π.

Chimica. — *Paranitroaniline ortoalogenate e loro derivati.* Nota del Socio G. Körner e del dott. Contardi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Flusso di energia e velocità di gruppo.* Nota di Maria Ferrari, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Il Reynolds, prendendone il concetto da Stokes, considerò [1] e determinò in modo preciso il flusso di energia meccanica dovuto a treni d'onde propagantesi, con velocità poco diverse, in un liquido infinitamente profondo; e chiamò *velocità di gruppo* quella corrispondente a tale flusso.

Lord Rayleigh rilevò poi [2] il significato cinematico della velocità di gruppo, ed estese l'indagine di Reynolds, stabilendo che, per tutte le onde irrotazionali, in un canale di qualsiasi profondità, la velocità con cui si propaga l'energia sempre coincide colla velocità di gruppo.

Egli raggiunse questo risultato mediante indipendente e diretto calcolo della energia e del suo flusso da un lato, della velocità di gruppo dall'altro.

[1] *On the rate of progression of groups of waves and the rate at which energy is transmithed by waves*, Sc. Papers, vol. I, 1869-1882 (Nature, 1877).

[2] Theory of Sound, 1877; *On progressive waves*, Sc. Paper, vol. I (1869-1881) (Proc. Lond. Math. Soc., 1877).

Ebbe però l'intuizione, chiaramente espressa alla fine della citata Memoria, che vi sia fra i due elementi un qualche legame più intimamente rispondente alla natura del fenomeno e constatabile senza calcoli formali.

Le indagini sistematiche sul flusso di energia, instituite in seguito da Poynting, Wien e Volterra, schiudono la via a soddisfare il desiderato di Lord Rayleigh. Tale appunto è lo scopo delle presente Nota.

1. *Generalità concernenti la localizzazione e il flusso dell'energia.* — Supponiamo di conoscere, per un determinato tipo di fenomeni fisici o meccanici, la legge con cui è distribuita la energia nei varî punti del campo S, nel quale il fenomeno si svolge. Si vuol dire con ciò che è assegnata come funzione del posto e del tempo la densità ε di tale distribuzione di energia; per modo che εdS rappresenta la quantità di energia contenuta (ad un generico istante t) nell'elemento dS.

Siamo così in grado di esprimere la variazione di essa durante un tempuscolo dt, che è

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dS\, dt\,.$$

2. È sempre possibile (ed in infiniti modi) di determinare un vettore χ, funzione uniforme dei punti del nostro campo, per il quale sia (in ogni tempo t)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \chi = 0\,. \tag{1}$$

Un tale vettore si può interpretare come *corrente o flusso di energia.*

Introduciamo infatti un nuovo vettore $\mathbf{U}$ legato a χ dalla relazione

$$\chi = \varepsilon \mathbf{U} \tag{2}$$

e confrontiamo la

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{U}) = 0\,,$$

immediata conseguenza della (1), colla nota equazione di continuità.

È chiaro allora che, assimilando ε alla densità di un fluido materiale in movimento, $\mathbf{U}$ si identifica alla sua velocità; rimane perciò giustificata la interpretazione di χ.

3. *Osservazione.* — La (1) determina una distribuzione vettoriale a meno di un vettore solenoidale. Si può quindi, trovata una espressione per la corrente di energia, ricavarne infinite altre, tutte egualmente soddisfacenti la (1) e perciò suscettibili di una eguale interpretazione, sovrapponendo un'arbitraria distribuzione solenoidale.

4. *Flusso assoluto e flusso relativo.* — Le considerazioni finora istituite valgono manifestamente qualunque sia il sistema di assi $Oxyz$ a cui

si intende riferita la specificazione del posto nel campo. Ne rimangono subordinate la funzione $\varepsilon(x, y, z, t)$ e conseguentemente il flusso χ $\left(e\mathbf{U} = \frac{1}{\varepsilon}\chi\right)$.

Non è difficile ricercare come si comportino densità e flusso quando si passi dal triedro $Oxyz$ ad altro triedro $\Omega x^\star y^\star z^\star$ dotato rispetto al primo di moto qualunque. Per la densità è sufficiente osservare che, essendo ε in un determinato posto indipendente dagli assi di riferimento, essa conserva lo stesso valore; o, più precisamente, la $\varepsilon^\star(x^\star, y^\star, z^\star, t)$ non è altro che la ε in cui sia materialmente sostituito alle coordinate x, y, z, le loro espressioni in termini di $x^\star, y^\star, z^\star, t$. Rispetto al flusso, ricordando la (2), si vede evidentemente che la modificazione subìta da χ si può tutta riportare a quella subìta dal fattore $\mathbf{U}$; e per quest'ultima basta ricorrere a ben note considerazioni di cinematica.

Infatti la nuova determinazione $\mathbf{U}^\star$, riferentesi agli assi $\Omega x^\star y^\star z^\star$ deve essere legata ad $\mathbf{U}$ (velocità riferita al primitivo sistema $Oxyz$) della formola fondamentale del moto relativo

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^\star + \tau, \tag{3}$$

τ indicando la velocità di trascinamento (del posto che si considera) dovuta al moto del triedro $\Omega x^\star y^\star z^\star$ rispetto agli assi $Oxyz$.

5. Non sarà inutile aggiungere che il vettore τ è funzione soltanto di t, se il triedro $\Omega x^\star y^\star z^\star$ è animato di moto traslatorio; che se invece $\Omega x^\star y^\star z^\star$ fosse animato di moto rigido qualsiasi, e fossero $\mathbf{v}_0$ e ω le caratteristiche del moto rispetto al centro di riduzione Ω, si avrebbe nel posto generico P,

$$\tau = \mathbf{v}_0 + \omega \wedge (\Omega - \mathrm{P}).$$

La (3) assegna così in ogni caso la modificazione da apportarsi ad $\mathbf{U}$ e, di conseguenza, al flusso χ, quando si cambiano gli assi di riferimento.

6. *Caso stazionario.* — Quando si tratta di fenomeni aventi comportamento stazionario rispetto ad un determinato riferimento, la densità di energia, in quanto espressa mediante le corrispondenti coordinate, deve naturalmente ritenersi indipendente dal tempo. La (1) si riduce allora a

$$\operatorname{div} \chi = 0$$

e si può quindi (a meno della solita distribuzione solenoidale) assumere

$$\chi = 0,$$

ossia riguardare nullo il flusso di energia.

7. *Caso periodico.* — Supponiamo, più generalmente, che rispetto ad un generico riferimento il considerato fenomeno e, con esso, la densità ε del-

l'energia sia funzione periodica di t, di periodo T. Sarà in tal caso $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ pure funzione periodica, di *valor medio nullo*.

Ora dalla (1), indicando con [ ] i valori medî di una generica funzione di t, si ha

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right] + \operatorname{div}[\chi] = 0 .$$

Ne consegue

$$\operatorname{div}[\chi] = 0$$

e quindi (a meno della solita distribuzione solenoidale)

$$[\chi] = 0 ,$$

ed ancora

$$[\mathrm{U}] = 0 .$$

Il fatto che il flusso χ risulta di valor medio nullo ha particolare importanza fisica ravvicinando (per quanto concerne il comportamento globale) questi fenomeni a quelli stazionarî.

Manca infatti in entrambi i casi un vero e proprio trasporto di energia; ed il flusso attraverso una generica sezione è da ritenersi: o rigorosamente nullo (caso stazionario) od oscillante nei due sensi; per modo che nella media si stabilisce un compenso (caso periodico).

8. *Onde semplici in un canale rettilineo.* — Consideriamo un canale a fondo orizzontale e sponde verticali col medesimo stato di moto in tutti i piani paralleli alle sponde.

Limitiamoci a due dimensioni e riferiamoci ad assi fissi, assumendo l'asse OX orizzontale coincidente col fondo del canale, l'asse OY verticale verso l'alto. Siano $z = x + iy$ $(i = \sqrt{-1})$ l'affissa di una particella qualunque P (del liquido che occupa il canale), u, v le componenti della sua velocità, $w = u - iv$.

Se si tratta, in particolare, di onde irrotazionali (di tipo permanente) le quali si propaghino nel senso delle x positive con velocità costante c, si può, secondo la classica teoria di prima approssimazione, attribuire a w l'espressione [1]

$$w = \alpha \cos k(z - ct + \beta) \tag{4}$$

dove α è una costante (reale, infinitesima) *a priori* arbitraria che dipende

[1] Ciò risulta assai facilmente, dando mediante la rappresentazione complessa forma alquanto più compendiosa ai risultati ben noti. Di questa forma si è valso sistematicamente il prof. Levi-Civita nelle lezioni sulla teoria delle onde tenute lo scorso anno nella R. Università di Padova.

dall'altezza dell'onda, β è pure costante (reale, arbitraria) e k è legato a c dalla equazione di Airy

$$c^2 = \frac{gh}{R} \operatorname{tang} h . h k . \tag{5}$$

(g accelerazione di gravità, h profondità media del canale).

9. *Gruppi di onde e relativa velocità.* — Consideriamo ora un insieme, gruppo o treno, di n onde semplici dotate ciascuna di velocità propria.

Nei limiti della teoria di prima approssimazione, esse si possono sovrapporre, pur seguitando a rimanere soddisfatte tutte le condizioni dinamiche. La espressione della velocità nel moto risultante dalla sovrapposizione sarà del tipo

$$w = \sum_1^n {}_r\, \alpha_r \cos k_r (z - c_r t + \beta_r) \tag{6}$$

con ovvio significato delle lettere.

Rileviamo che, mentre ciascuno dei moti ondosi componenti ha carattere permanente rispetto ad un osservatore animato dalla corrispondente velocità di propagazione, non esiste, in generale, alcun osservatore (alcun sistema $\Omega x^\star y^\star$) rispetto a cui il moto del gruppo appaia stazionario, od anche soltanto periodico.

10. Proviamoci infatti a porre

$$\begin{cases} x^\star = x - vt, \\ y^\star = y, \end{cases} \tag{7}$$

essendo v la velocità di traslazione dei nuovi assi $\Omega x^\star y^\star$; e sostituiamo nelle (6) l'affissa z mediante la sua espressione

$$x^\star + iy^\star + vt = z^\star + vt,$$

desunta dalla (7). Avremo

$$w = \sum_1^n {}_r\, \alpha_r \cos \{ k_r z^\star - k_r (v - c_r) t + \beta_r \}, \tag{8}$$

e ci sarà periodicità rispetto al tempo solo quando i coefficienti di t nei varî termini sieno tra loro commensurabili.

In particolare — a questo limiteremo la nostra indagine — quando i suddetti coefficienti risultino tutti eguali.

Ciò esige che si abbia, per qualunque r,

$$k_r (v - c_r) = \text{cost} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Se $n = 2$, se cioè si tratta di un gruppo risultante dalla sovrapposizione di due sole onde semplici, è manifestamente sempre possibile determinare una v per la quale la precedente condizione risulti soddisfatta.

11. Per n qualunque il fenomeno non si presenta più allo stesso modo, e una completa discussione non è troppo semplice. Se però si suppone che le c_r, e di conseguenza le k_r in base alla (5), sieno molto vicine fra loro, e precisamente così vicine da poterne trattare i divarii come quantità di primo ordine, riesce possibile soddisfare alle (9), qualunque sia il numero n delle onde che compongono il gruppo. Infatti, per l'ipotesi, le c si potranno presentare sotto la forma

$$c + \gamma_r \, dc \, ,$$

essendo c un loro valore medio, le γ_r costanti arbitrarie e dc trattabile alla stregua dei differenziali. Ne consegue

$$k_r = k + \frac{dk}{dc} \gamma_r \, dc \qquad (r = 1 \, , 2 \, , \ldots n) \, ;$$

e la (9) diviene in conformità, a meno di termini in dc^2:

$$k(v - c) + \left\{ (v - c) \frac{dk}{dc} - k \right\} \gamma_r \, dc = \text{cost}$$

che fornisce per v l'espressione

$$v = \frac{d(kc)}{dk}$$

rilevata da Lord Rayleigh, e da lui chiamata *velocità di gruppo*.

12. *Teorema di Reynolds.* — Applichiamo ad un gruppo di onde semplici (di velocità poco diversa) le considerazioni energetiche svolte nei numeri 1-7.

Rispetto agli assi $\Omega x^\star y^\star$, animati della velocità v, il regime di moto ha carattere periodico. Si può dunque ritenere nullo (n. 7) il valore medio del flusso di energia meccanica, dovuto al nostro moto ondoso, in quanto si riferisca a tali assi. Sarà nullo, in conseguenza, il valor medio $[\mathbf{U}^\star]$ della corrispondente velocità.

D'altra parte la velocità assoluta $\mathbf{U}$, riferita cioè ad assi immobili sul fondo, è legata ad $\mathbf{U}^\star$ dalla formola generale (3). Nel caso attuale la velocità di trascinamento τ non è altro che la velocità di gruppo, cioè $v \, . \, \mathbf{J}$, $\mathbf{J}$ rappresentando un vettore unitario nel senso positivo dell'asse OX.

Si ha dunque

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^\star + v\mathbf{J}$$

e, prendendo i valori medî,

$$[\mathbf{U}] = v\mathbf{J} \, ;$$

da cui apparisce che la velocità (media) con cui si trasporta l'energia, coincide colla velocità di gruppo. C. d. d.