ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Matematica. — *Sulla equivalenza dei poliedri.* Nota del prof. ONORATO NICOLETTI, presentata dal Socio U. DINI.

Due poliedri P, P′ (o due aggregati poliedrici) si dicono, come è noto, *equivalenti*, quando è possibile decomporli in un numero finito di poliedri congruenti (equivalenza per somma) oppure quando sono differenza di due tali aggregati (equivalenza per differenza). Se P, P′ sono due tali aggregati, tra i loro angoli diedri ed il diedro piatto deve aver luogo, come il Dehn ha dimostrato, almeno una relazione lineare omogenea a coefficienti razionali; e poichè si hanno esempî di aggregati poliedrici di ugual volume, per i quali nessuna tale relazione può aver luogo, è chiaro che l'uguaglianza di volume di due aggregati poliedrici non è condizione sufficiente per la loro equivalenza [1].

Ma è facile vedere (riprendendo e completando i ragionamenti del Dehn) che, se due aggregati poliedrici P e P′ sono equivalenti, non solo i loro angoli diedri e l'angolo piatto, ma, in generale, anche i loro spigoli sono legati da una o più relazioni lineari omogenee a coefficienti interi; è possibile inoltre caratterizzare in modo semplice e notevole il sistema di tali relazioni. Si ottengono in tal guisa per l'equivalenza di due aggregati poliedrici, oltre quelle del Dehn, altre condizioni *necessarie*, delle quali, conviene dirlo esplicitamente, l'uguaglianza di volume non è, in generale, conseguenza. Aggiungendo questa ulteriore condizione, si ottiene un sistema di condizioni necessarie e sufficienti per l'equivalenza di due aggregati poliedrici? A questa interessante questione non mi è riuscito di rispondere.

Mi permetto di comunicare alla R. Accademia i risultati della mia ricerca, riserbandomi di darne in altro luogo le dimostrazioni.

1. Sia P un poliedro od un aggregato di poliedri, e siano $s_1, s_2, \dots s_n$ le misure dei suoi spigoli, $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$ quelle degli angoli diedri corrispondenti (essendo ad es. π la misura del diedro piatto). Diremo che il *modulo* $\{s_1, s_2, \dots s_n\} \equiv \{S\}$ degli spigoli del poliedro P ha la dimensione r e scriveremo anche $[S] = r$, quando tra le $s_1, s_2, \dots s_n$ hanno luogo $n - r$ e non più relazioni lineari omogenee, indipendenti, a *coefficienti razionali*, o, ciò che è lo stesso, quando le $s_1, s_2, \dots s_n$ possono esprimersi linearmente ed omogeneamente, con *coefficienti razionali*, per r quantità $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_r$, ma questo non è possibile per valori minori di r. Analogamente, detta s

[1] Cfr. Dehn, *Ueber dem Rauminhalt* (Math. Annalen, Bd 55, S. 465). Per la bibliografia sull'argomento consulta: Amaldi, *Sulla teoria della equivalenza* in *Questioni riguardanti le matematiche elementari* di F. Enriques (Bologna, Zanichelli, 1912, vol. I, pp. 173-190).

la dimensione del modulo $\{\Sigma\} \equiv \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n\}$ dei diedri di P, le σ_1, $\sigma_2, \ldots \sigma_n$ si esprimeranno linearmente ed omogeneamente, ancora con coefficienti razionali, per s quantità $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_s$.

Consideriamo ora l'espressione $\sum_1^n {}_i s_i \sigma_i$; esprimendo le s_i per le ξ, le σ_i per le η, essa diventa una forma bilineare, a coefficienti razionali, nelle ξ e nelle η, e può *razionalmente* ridursi ad una forma normale $\sum_1^\alpha {}_t f_t \varphi_t$ (con $\alpha \leq r$, $\alpha \leq s$), essendo le $f_1 \ldots f_\alpha$ $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\alpha)$ delle combinazioni lineari omogenee, *indipendenti ed a coefficienti razionali*, delle $s_1 \ldots s_n$ (delle $\sigma_1 \ldots \sigma_n$). In altre parole, ciascuna $f_t(\varphi_t)$ appartiene al modulo $\{S\}$ $(\{\Sigma\})$ ed i moduli $\{F\} = \{f_1 f_2 \ldots f_\alpha\}$, $\{\Phi\} = \{\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_\alpha\}$ hanno la dimensione α.

Una tale forma *ridotta* $\sum_1^\alpha {}_t f_t \varphi_t$ è determinata a meno di una sostituzione lineare omogenea, non degenere, a *coefficienti razionali*, sulle $f_1, f_2, \ldots f_\alpha$ e della contragrediente sulle $\varphi_1 \ldots \varphi_\alpha$; il numero α dei suoi termini si dirà il rango del poliedro (o dell'aggregato poliedrico) P, i segmenti $f_1 \ldots f_\alpha$, ed i diedri $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\alpha$ *segmenti* e *diedri caratteristici*.

Ad es., un poliedro regolare, per il quale sia s il numero degli spigoli, l la misura dello spigolo, λ quella del diedro, ha come forma ridotta $sl\lambda$; un prisma, di cui sia l lo spigolo, $s_1, s_2, \ldots s_n$ i lati di una base, ha come forma ridotta $\left\{\sum_1^n {}_i s_i + l(n-2)\right\}\pi = f\pi$; un tetraedro trirettangolo isoscele, di cui si dica l la misura dello spigolo di un diedro retto ed α' il diedro acuto (che è incommensurabile con π) ha come forma ridotta

$$3l\sqrt{2}\,\alpha' + 3l\,\frac{\pi}{2}, \text{ ecc.}$$

2. Ciò premesso, siano P e P′ due aggregati poliedrici equivalenti (per somma o per differenza), si dicano α, α' i loro ranghi, $\sum_1^\alpha {}_t f_t \varphi_t$, $\sum_1^{\alpha'} {}_u f'_u \varphi'_u$ due loro forme ridotte. Un ragionamento analogo a quello del Dehn dimostra il teorema fondamentale:

Tra i segmenti caratteristici dei due aggregati poliedrici hanno luogo una o più relazioni lineari omogenee a coefficienti razionali interi [1]. *Tutte le relazioni di tale forma siano le*

(1) $$\Theta_i(f, f') = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots q < \alpha + \alpha').$$

È possibile determinare un sistema fondamentale di soluzioni razionali

[1] Può fare eccezione il solo caso in cui si abbia $\alpha = \alpha' = 1, \varphi = \varphi' = \pi$.

intere delle (1) $f_t^{(\rho)}, f_u'^{(\rho)}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, \alpha + \alpha' - q)$, *per le quali valgano le congruenze*

$$(2) \qquad \sum_1^{\alpha}{}_t\, f_t^{(\rho)}\, \varphi_t \equiv \sum_1^{\alpha'}{}_u\, f_u'^{(\rho)}\, \varphi_u' \pmod{\pi}.$$

Si trae di qui una disuguaglianza notevolissima Dalle (1) segue che il modulo $\{f, f'\}$ ha la dimensione $\alpha + \alpha' - q$; dalle (2) segue analogamente che il modulo $\{\varphi, \varphi', \pi\}$ ha una dimensione non maggiore di $q + 1$; si ha dunque (indicando sempre il simbolo $[M]$ la dimensione di un modulo $\{M\}$) la disuguaglianza;

$$(A) \qquad [f, f'] + [\varphi, \varphi', \pi] \leq \alpha + \alpha' + 1.$$

Sia ora ad es.: $\alpha \geq \alpha'$; osservando che è:

$$(3) \qquad [f, f'] \geq [f] \geq \alpha \quad ; \quad [\varphi, \varphi', \pi] \geq [\varphi] \geq \alpha,$$

e quindi

$$[f, f'] + [\varphi, \varphi', \pi] \geq 2\alpha,$$

dalla (A) si trae:

$$\alpha' \leq \alpha \leq \alpha' + 1;$$

cioè il teorema:

Due aggregati poliedrici equivalenti hanno ranghi uguali oppure differenti di una unità.

3. Una discussione, un po' minuta, ma senza difficoltà, dimostra il teorema seguente:

Siano P, P′ *due aggregati poliedrici equivalenti;* α, α' (*con* $\alpha \geq \alpha'$) *i loro ranghi,* $\sum_1^{\alpha}{}_\rho f_\rho \varphi_\rho$, $\sum_1^{\alpha'}{}_\sigma f_\sigma' \varphi_\sigma'$ *due loro forme ridotte. Sono possibili solo i casi seguenti*:

I) È $\alpha = \alpha'$ *ed il diedro piatto* π *non appartiene al modulo dei diedri caratteristici dei due aggregati poliedrici* [1]. *I due aggregati hanno forme ridotte identiche* (*o razionalmente equivalenti*)

$$(I) \qquad (P) \sum_1^{\alpha}{}_\rho f_\rho \varphi_\rho \quad ; \quad (P') \sum_1^{\alpha}{}_\rho f_\rho \varphi_\rho . \qquad (\pi \not\equiv 0 \pmod{\{\varphi_1 \ldots \varphi_\alpha\}}).$$

II) *È ancora* $\alpha = \alpha'$ *ed il diedro piatto appartiene al modulo* $\{\Phi, \Phi'\}$. *Sono allora possibili due ipotesi*:

[1] Non esiste cioè alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti interi tra le $\varphi_1 \ldots \varphi_\alpha$, $\varphi_1' \ldots \varphi_{\alpha'}'$ e π.

a) *il diedro piatto non appartiene nè al modulo* $\{\Phi\}$, *nè al modulo* $\{\Phi'\}$. *Come forme ridotte dei due aggregati possono prendersi le forme*

$$(\mathrm{II})_1 \qquad (\mathrm{P})\ \sum_1^{\alpha} {}_{\rho} f_\rho \varphi_\rho \quad ; \quad (\mathrm{P}')\ \sum_1^{\alpha} f_\rho(\varphi_\rho + k_\rho \pi) \qquad (\pi \not\equiv 0 \pmod{\{\Phi\}})$$

essendo le k_ρ *numeri razionali, non tutti nulli;*

b) *il diedro piatto appartiene ad uno dei due moduli* $\{\Phi\}$, $\{\Phi'\}$; *appartiene allora anche all'altro. Come forme ridotte dei due aggregati possono prendersi le due*

$$(\mathrm{II})_2 \qquad (\mathrm{P})\ \sum_1^{\alpha-1} {}_{\rho} f_\rho \varphi_\rho + f_\alpha \pi \quad ; \quad (\mathrm{P}')\ \sum_1^{\alpha-1} {}_{\rho} f_\rho \varphi_\rho + f'_\alpha \pi$$

$$(\pi \not\equiv 0 \pmod{\{\varphi_1 \ldots \varphi_{\alpha-1}\}}) .$$

III) *È* $\alpha = \alpha' + 1$, *come forme ridotte dei due aggregati poliedrici possono prendersi*

$$(\mathrm{P})\ \sum_1^{\alpha-1} {}_{\rho} f_\rho \varphi_\rho + f_\alpha \pi \quad ; \quad (\mathrm{P}')\ \sum_1^{\alpha-1} {}_{\rho} f_\rho \varphi_\rho ; \qquad (\pi \not\equiv 0 \ (\mathrm{modd}\ \{\varphi_1 \ldots \varphi_{\alpha-1}\})) .$$

E tutti questi casi sono effettivamente possibili.

Se in particolare è $\alpha' = 1$, si hanno i casi seguenti:

$(\mathrm{I})^*$	$(\mathrm{P})\, f\varphi$	, $(\mathrm{P}')\, f\varphi$	, $[\varphi, \pi] = 2$
$(\mathrm{II})_1{}^*$	$(\mathrm{P})\, f\varphi$	, $(\mathrm{P}')\, f(\varphi + k\pi)$	, $[\varphi, \pi] = 2$, k raz$^{\mathrm{le}}$ $\neq 0$
$(\mathrm{II})_2{}^*$	$(\mathrm{P})\, f\pi$	, $(\mathrm{P}')\, f'\pi$	
$(\mathrm{III})^*$	$(\mathrm{P})\, f_1\varphi + f_2\pi$	, $(\mathrm{P}')\, f_1\varphi$	, $[\varphi, \pi] = 2$.

4. Esempii. — *a*) Abbiamo visto che un prisma ha come forma ridotta $f\pi$, con $f = \Sigma s_i + l(n-2)$; ne segue:

Un poliedro equivalente ad un prisma ha il rango 1 *e* π *come angolo caratteristico.*

E questo si verifica subito negli esempî noti di poliedri equivalenti ad un prisma (tetraedri di Hill, piramide di Iuel).

b) *Se un aggregato poliedrico è equivalente alla somma di un numero finito di aggregati simili ad esso, ha il rango* 1 *e* π *come angolo caratteristico.*

Questa proposizione vale in particolare quando P possa decomporsi in m^3 $(m \geq 2)$ aggregati simili ad esso nel rapporto $\frac{1}{m}$ di similitudine.

E si verifica agevolmente che i tetraedri di Hill, la piramide di Iuel possono decomporsi in tal modo.

c) Gli angoli diedri dei poliedri regolari, diversi dal cubo, sono incommensurabili con π. Ne segue:

Due poliedri regolari equivalenti sono congruenti.

Un poliedro regolare, diverso dal cubo, non può essere equivalente ad un aggregato di poliedri regolari della stessa specie.

d) In un tetraedro trirettangolo isoscele l'angolo diedro acuto α' è legato al diedro α del tetraedro regolare dalla relazione

$$2\alpha' + \alpha = \pi$$

ed è quindi, come α, incommensurabile con π. Ne segue:

Un aggregato di tetraedri trirettangoli isosceli non può essere equivalente ad un prisma.

Un aggregato di tetraedri trirettangoli isosceli non è mai equivalente ad un aggregato di tetraedri regolari.

e) Si consideri in un cubo di lato l un vertice A e gli altri B, C, D opposti ad A nelle tre faccie che concorrono in A. Congiungendo questi quattro vertici, il cubo viene diviso in un tetraedro regolare di lato $l\sqrt{2}$ ed in quattro tetraedri trirettangoli isosceli di lato l. La forma ridotta del cubo è $6l\pi$; per l'aggregato considerato si ha

$$\Sigma s_i \sigma_i = 6l\sqrt{2}\,\alpha + 4\left(3l\frac{\pi}{2} + 3l\sqrt{2}\,\alpha'\right)$$

ed avendosi $2\alpha' + \alpha = \pi$, la forma ridotta di esso aggregato è

$$6l(1 + \sqrt{2})\,\pi\,;$$

si ha dunque il caso (II)$_2^*$ del n. 4.

f) In un ottaedro regolare di lato l i tre piani condotti per il centro e per i tre lati di una faccia lo dividono in otto tetraedri trirettangoli isosceli di lato $\frac{l}{\sqrt{2}}$. Indicando con β l'angolo diedro dell'ottaedro regolare, la sua forma ridotta è $12l\beta$, con $\cos\beta = -\frac{1}{3}$. Ma indicando con α l'angolo diedro del tetraedro regolare è $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ e quindi $\beta + \alpha = \pi$, donde $\beta = 2\alpha'$. E la forma ridotta dell'aggregato degli otto tetraedri trirettangoli isosceli è data da

$$24l\alpha' + 24\frac{l}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} = 12l\beta + 12\frac{l}{\sqrt{2}}\pi.$$

Si ha così un esempio di due aggregati equivalenti dei ranghi 1 e 2.

g) Sia P un aggregato poliedrico, e P′ il suo simmetrico rispetto ad un piano; è chiaro che essi hanno la stessa forma ridotta; ed è noto anche che due tali aggregati sono equivalenti.