ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

indicava la risonanza più nettamente di quanto non avvisasse l'orecchio in base a diminuzione di intensità. Era positivo il morsetto, che nell'uso ordinario dello strumento, se è congiunto al positivo della pila fornisce le note più basse [1].

Con tubi molto più lunghi, o molto più corti, si leggeva ancora qualche piccola corrente continua, di verso variabile da caso a caso; chiudendo il tubo che ha una derivazione verso il microfono si ottenevano ancora grandi letture e persino con corrente industriale a 42 periodi. È evidente, che con ciò si costringeva l'aria racchiusa a trasportare energicamente tutta l'azione meccanica del telefono sul microfono.

Notoriamente, esistono altri mezzi di rettificazione parziale delle correnti telefoniche.

Matematica. — *Sulle equazioni integrali.* Nota di Giulio Andreoli, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

Ho l'onore di comunicare a questa illustre Accademia alcuni risultati da me ottenuti sull'equazione integrale regolare:

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^{g(x)} \mathrm{N}(xy)\, \varphi(y)\, dy = f(x) \tag{1}$$

ove g è una funzione della sola x, soggetta ad alcune condizioni, ed $\mathrm{N}(xy)$, $f(x)$ sono finite e continue.

L'equazione considerata comprende come casi particolari le equazioni di Volterra e di Fredholm, per $g(x) = x$ e $g(x) = 1$; la forma, quindi della g ha una speciale importanza sulla soluzione della (1).

1. Posto:

$$\Gamma_n(x) = \int_0^{|g(x)|} \Gamma_{n-1}(y)\, dy \quad , \quad \Gamma_0 = 1, \tag{2}$$

dimostro i seguenti teoremi:

Teorema I. — Se si ha

$$\Gamma_n(x) \leq a_n$$

[1] Nel funzionamento ordinario del fonoalternatore lo scambio dei poli della pila equivale a cambiare di 180 gradi la fase della corrente nel microfono, rispetto alla fase dei movimenti della sua lamina.

per qualunque valore di x, e per n maggiore d'un certo numero ν sufficientemente grande, e se la funzione

$$\sum a_n z^n \tag{3}$$

è olomorfa; allora la soluzione della (1) ottenuta col metodo di iterazione, è espressa, qualunque sia λ, dalla:

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \int_0^{g(x)} \mathrm{N}(xy_1) f(y_1)\, dy_1 + \tag{4}$$
$$+ \lambda^2 \int_0^{g(x)} \mathrm{N}(xy_1)\, dy_1 \int_0^{g(y_1)} \mathrm{N}(y_1 y_2) f(y_2)\, dy_2 - \cdots$$

Naturalmente la $\mathrm{N}(xy)\,\varphi(y)$ deve essere integrabile.

Si deduce subito la validità incondizionata dello sviluppo nel caso di Volterra.

Teorema II. — Se le condizioni del teorema I sono soddisfatte solo in un certo intorno di $x = 0$, lo sviluppo (4) sarà valido, qualunque sia λ, in quell'intorno.

Teorema III. — Se la serie (3) non è olomorfa, ma le condizioni del teorema I sono soddisfatte qualunque sia x, la soluzione (4) è certamente valida solo per $\lambda < \varrho$, in cui ϱ è il limite inferiore dei raggi di convergenza delle serie:

$$\sum_0^\infty \Gamma_n(x)\, z^n .$$

Teorema IV. — Se le condizioni del teorema precedente sono soddisfatte solo in un certo intorno di $x = 0$, la (4) è valida certamente, solo per valori di x compresi in quell'intorno, e per valori di λ vincolati dalle condizioni del teorema III.

Teorema V. — La soluzione non esiste, almeno sotto la forma (4), se le condizioni del teorema IV non sono verificate in nessun intorno di $x = 0$.

Nel caso particolare che $g(x) = x^m$, lo sviluppo trovato è certamente valido, solo:

1°) se $\lambda < \dfrac{1}{1-m}$, $m < 1$ ed x è qualunque;

2°) x e λ qualunque, $m = 1$;

3°) $x < 1$, λ qualunque, $m > 1$.

Chiamiamo ora condizioni J le condizioni di esistenza della (4) e di integrabilità della $\mathrm{N}(xy)\,\varphi(y)$. Supponiamo di aver assegnato un insieme di funzioni γ_p, che, poste in luogo di $g(x)$ nella (1), diano come soluzioni della (1) lo sviluppo (4) corrispondente, in un certo intorno $(-\xi', +\xi'')$ di $x = 0$, qualunque sia λ.

Sia data poi una funzione $h(x)$, che, posta in luogo della $g(x)$, soddisfi le condizioni J e che inoltre:

a) esista una successione di intervalli $(-\eta_1 \xi_1) \ldots (-\eta_2 \xi_p) \ldots$; per cui:

$$|g(x)| \leq |\gamma_p(x)| \quad ; \quad -\eta_p < x < \xi_p \, ;$$

b) l'insieme $\xi_1 \ldots \xi_p \ldots$ ammetta come limite inferiore X; e l'insieme $-\eta_1 \ldots -\eta_p \ldots$ come limite superiore $-$Y. Allora si ha il

Teorema VI. — Lo sviluppo (4), relativo alla $h(x)$ presa come limite superiore dell'integrale nella (1), sarà valido, qualunque sia λ, per x contenuto nella parte comune a $(-\xi', +\xi'')$ $(-\mathrm{Y}, \mathrm{X})$.

Si può dimostrare così la validità della (4) per $g(x)$ eguale, ad es., a

$$\operatorname{sen} \alpha x \, , \; 1 - \cos \alpha x \, , \; e^{\alpha x} - 1 \, , \; \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) \, , \ldots , \mathrm{R}(x)$$

ove R sia una funzione continua, che sia nulla per $x = 0$, e che a destra ed a sinistra del punto $x = 0$ ammette numeri derivati finiti.

2. Come esempio di equazioni (1) la cui soluzione può non esistere per certi intervalli, ed esistere invece in altri, considero quelle ottenute ponendo

$$g(x) = x \; , \; x \leq \tfrac{1}{2} \quad ; \quad g(x) = 1 \; , \; x > \tfrac{1}{2} \, ;$$

oppure

$$g(x) = 0 \; , \; x \leq 0 \quad ; \quad g(x) = x \; , \; 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2} \quad ; \quad g(x) = 1 - x \; , \; x \geq \tfrac{1}{2} \, .$$

Imponendo ad f, λ ed N alcune condizioni, la soluzione delle equazioni corrispondenti alla prima forma di g esiste solo per $x \leq \frac{1}{2}$; mentre quella corrispondente all'altra, esiste per $x \neq -\xi$ ed $x < \xi$, ove $-\xi$ è un punto in cui la $f(x)$ perde significato.

Ponendo successivamente

$$\mathrm{M}(xy) = \frac{f(x) \cdot \mathrm{U}(xy)}{\int_0^1 \mathrm{U}(xs) \, f(s) \, ds} \, , \tag{5}$$

ove U sia un nucleo regolare;

$$\left\{ \begin{aligned} b_p &= \frac{1}{p!} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \mathrm{N} \begin{pmatrix} s_1 \ldots s_p \\ s_1 \ldots s_p \end{pmatrix} ds_1 \ldots ds_p \quad , \quad b_0 = 1 \\ \mathrm{B}_p(xy) &= \frac{1}{p!} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \mathrm{N} \begin{pmatrix} x \, s_1 \ldots s_p \\ y \, s_1 \ldots s_p \end{pmatrix} ds_1 \ldots ds_p \, , \end{aligned} \right. \tag{6}$$

e determinando le $A_p(xy)$ e le $M^{(p)}(\sigma\tau y)$ mediante le relazioni ricorrenti

$$(7)\quad \begin{cases} A_p = \dfrac{1}{p!}\displaystyle\int_0^1 \dots \int_0^1 \begin{vmatrix} M(xy) & M^{(p)}(x\,,s_1\,;y) & \dots & M^{(p)}(x\,,s_p\,;y) \\ N(s\,,y) & N(s_1 s_1) & \dots & N(s_1 s_p) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ N(s_p y) & N(s_p s_1) & \dots & N(s_p s_p) \end{vmatrix} ds_1 \dots ds \\[2ex] M^{(p)}(\sigma\tau y) = \dfrac{\displaystyle\int_0^{g(\sigma)} N(\sigma z)\, A_{p-1}(zy)\, dz \,.\, F_{p-1}(y\tau)}{\displaystyle\int_0^1 F_{p-1}(ys)\, B_{p-1}(sy)\, ds}\,, \end{cases}$$

ove le F sono nuclei regolari, allora l'equazione (1) è risolta formalmente da

$$(8)\qquad \varphi(x) = f(x) - \lambda \int_0^1 \frac{\Sigma A_r(xy)\,\lambda^r}{\Sigma b_r\,\lambda^r}\, f(y)\, dy\,.$$

Valgono i seguenti teoremi:

Teorema VII. — La (1) è risolta dalla (8), se λ non è radice di $\Sigma b_r \lambda^r = 0$, e se per y compreso fra $(0\,,1)$, estremi inclusi, si abbia

$$\Phi_p(y) = \left| \int_0^1 F_p(ys)\, B_p(sy)\, ds \right| > \varepsilon \qquad (p = 0\,,1\,,\dots).$$

Teorema VIII. — Ove le Φ_p si annullino in punti formanti un insieme di misura nulla, e se gli integrali esistono, supposto $\Sigma b_r \lambda^r \neq 0$, la (1) è risolta dalla (8).

Teorema IX. — Se le condizioni precedenti sono verificate solo per x compreso in un certo intorno dello zero, in quell'intorno solo vale la (8).

3. Inoltre, se si definiscono le A e le b nel seguente modo:

$$\begin{cases} A_p(xy) = \dfrac{1}{p!}\displaystyle\int_0^1 \dots \int_0^1 \begin{vmatrix} M(xy) & M(xs_1) & \dots & M(xs_p) \\ P(s_1 y) & P(s_1 s_1) & \dots & P(s_1 s_p) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P(s_p y) & \dots & \dots & P(s_p s_p) \end{vmatrix} ds_1 \dots ds_p\,,\quad A_0 = M \\[2ex] b_p = \dfrac{1}{p!}\displaystyle\int_0^1 \dots \int_0^1 P\begin{pmatrix} s_1 \dots s_p \\ s_1 \dots s_p \end{pmatrix} ds_1 \dots ds_p \qquad b_0 = 1 \end{cases}$$

e la P sia determinata dalla

$$(9)\qquad \int_0^1 M(xs)\, P(sy)\, ds = \int_0^{g(x)} N(xz)\, M(zy)\, dz\,,$$

l'espressione formale (8) verifica ancora la (1). Però la effettiva validità della (8) esiste solo se la (9) ammette soluzione, qualunque sieno $x\,,y$

compresi fra $(0, 1)$, e se $\Sigma b_r \lambda^r \neq 0$; supporremo che essa P sia continua. Se invece si considerasse l'equazione omogenea

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^{g(x)} \mathrm{N}(xy)\, \varphi(y)\, dy = 0\,, \tag{10}$$

essa, per $\Sigma b_r \lambda^r \neq 0$ non ammetterebbe altra soluzione che $\varphi(x) = 0$. Supponiamo invece che λ sia radice *r-pla* di $\Sigma b_r \lambda^r = 0$.

Posto

$$\mathrm{T}_r^{(m)}\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ y_1 \dots y_n \end{pmatrix} \lambda \Big) =$$

$$= \sum_0^\infty \frac{\lambda^t}{s!} \int_0^1 \dots \int_0^1 \begin{vmatrix} \mathrm{P}(x_1 y_1) & \dots & \mathrm{P}(x_1 s_t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{P}(x_{m-1} y_1) & \dots & \dots \\ \mathrm{M}(x_m y_1) & \mathrm{M}(x_m y_2) \dots & \mathrm{M}(x_m s_t) \\ \mathrm{P}(x_{m+1} y_1) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \mathrm{P}(s_t s_t) \end{vmatrix} ds_1 \dots ds_t \quad (r \geq m)$$

e scelti $\xi_1 \dots \xi_r$, $\eta_1 \dots \eta_r$ tali che i determinanti D di Fredholm relativi al nucleo P diventino

$$\mathrm{D}_1\begin{pmatrix} \xi_r \\ \eta_r \end{pmatrix} \lambda \Big) = 0\,, \dots, \mathrm{D}_{r-1}\begin{pmatrix} \xi_2 \dots \xi_r \\ \eta_2 \dots \eta_r \end{pmatrix} \lambda \Big) = 0\,,\ \mathrm{D}_r\begin{pmatrix} \xi_1 \dots \xi_r \\ \eta_1 \dots \eta_r \end{pmatrix} \lambda \Big) \neq 0 \ (^1);$$

avremo, supposte verificate le condizioni sopra enunciate, il

Teorema X. — La funzione $\Phi_m(x) = \mathrm{T}_r^{(m)}\begin{pmatrix} \xi_1\, \xi_2 \dots x \dots \xi_r \\ \eta_1\, \eta_2 \dots \eta_m \dots \eta_r \end{pmatrix} \lambda \Big)$ soddisfa all'equazione omogenea, se λ è radice *r-pla* di $\mathrm{D}(\lambda) = 0$.

Teorema XI. — L'equazione omogenea (10) ammette, al più, r soluzioni linearmente indipendenti.

Nel caso del Fredholm, tale limite superiore è, come è noto, effettivamente raggiunto.

4. Inoltre dimostro i seguenti teoremi:

Teorema XII. — Se esiste un quadrato, nel piano (ξ, η), avente due suoi vertici (α, α), $(-\beta, -\beta)$ sulla retta $\eta = \xi$, e se tale quadrato contenga internamente sia lo zero, sia la curva $g(\xi)$ per

$$-\beta \leq \xi \leq \alpha\,,$$

la (1) è riconducibile direttamente ad equazioni regolari di Fredholm.

Teorema XIII. — Se tale quadrato non esiste, la (1) è riconducibile ad equazioni di Fredholm, ma queste sono singolari.

(1) Per la continuità del nucleo ciò avviene.

Servendomi del teorema XII, dimostro che la (1), ove si ponga $g(x) = x^m$, ammette ancora soluzioni per $x > 1$; $0 < m < 1$.

Tale metodo applicato all'equazione di Volterra ci dà il nucleo risolvente sotto la forma:

$$\frac{\Sigma A_r(xy)\,\lambda^r}{e^{\lambda h}}.$$

5. Infine riesco a ricondurre, sotto certe condizioni, molti problemi funzionali ad equazioni di I specie di Fredholm, e mostro come nel caso dell'equazione (1) ciò non sia che un'ovvia estensione di quanto avviene nel caso dei sistemi di equazioni lineari.

Riduco al detto tipo sia la (1), sia le equazioni integro-differenziali considerate dal prof. Volterra (*Leçons sur les équations intégrales* ecc., pp. 139-141).

Infine fra i criterî relativi alla risolubilità di equazioni di prima specie, fo notare il seguente:

Sia $M(xy)$ un nucleo ortogonale alla $f(y)$ solamente. Allora si ha:

Teorema XIV. — Le soluzioni sommabili e di quadrato sommabile dell'equazione regolare

$$\int_0^1 N(xs)\,\varphi(s)\,ds = f(x)$$

sono date dalle funzioni $\varphi(y)$ ortogonali ad $\int_0^1 M(xz)\,N(zy)\,dz$, ma non ortogonali al nucleo $N(xy)$.

Chimica. — *Torimolibdati* [1]. Nota di G. A. Barbieri, presentata dal Socio G. Ciamician.

Berzelius [2] osservò che mescolando la soluzione di un sale di torio con quella di un molibdato alcalino si forma un precipitato bianco di cui non determinò la composizione. In opportune condizioni di concentrazione e di temperatura io potei ottenere, con la stessa reazione, dei composti cristallizzati i quali oltre al torio e all'acido molibdico contengono dell'alcali. Impiegando l'eptamolibdato di ammonio si ha un composto la cui composizione può venir rappresentata dalla formula dualistica

$$4\,(NH_4)_2O\,.\,ThO_2\,.\,12\,MoO_3\,.\,8\,H_2O\;;$$

con l'eptamolibdato di sodio si ha un composto analogo:

$$4\,Na_2O\,.\,ThO_2\,.\,12\,MoO_3\,.\,15\,H_2O\,.$$

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale dell'Università di Ferrara.
[2] I. B. Berz., *10*, 98 (1829).