ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Geometria. — *Presentando due volumi di « Vorlesungen über darstellenden Geometrie »*. Nota del Corrispondente GINO LORIA.

Nell'offrire in omaggio a questa illustre Accademia le due prime parti di un trattato di geometria descrittiva, di recente pubblicato in lingua tedesca [1], mi sia concesso di dare qualche informazione intorno ai concetti che mi hanno guidato nello scriverlo e nel comporre altri lavori che ad esso collegansi, e, in generale, intorno all'indirizzo da seguire negli studî intorno a quella scienza.

* * *

La geometria descrittiva, benchè sia oggi una disciplina rigorosamente esatta e prettamente teorica, pure, a somiglianza di molte altre, si è formata in seguito al confluire di parecchi ordini d'investigazioni, aventi tutte le loro scaturigini in questioni la cui soluzione veniva richiesta dal civile consorzio o dalle arti.

Prime, tanto in ordine di tempo, quanto per la grande importanza che raggiunsero, sono le ricerche aventi per midollo spinale il concetto di *projezione ortogonale*, alle quali diedero e mantennero vita gli architetti, a partire da quelli che eressero le piramidi d'Egitto [2], a continuare con quelli che elevarono i monumenti destinati ad eternare la memoria delle vittorie di Roma imperiale [3], per giungere a coloro che, a cominciare dal Rinascimento, documentarono nel marmo il primato artistico dell'Italia sopra tutte le nazioni civili. In tal modo si costituì gradatamente una nuova disciplina ausiliaria dell'ingegnere (la *stereotomia*) ed il sistema di rappresentare graficamente un edificio col mezzo della « pianta » e dell' « alzato », nel periodo che corre da Alberto Dürer ad A. F. Frézier, si trasformò insensibilmente in un procedimento sicuro per eseguire determinate operazioni geometriche sopra le figure a tre dimensioni. Al genio di Monge era riserbato di trasformare questo procedimento-crisalide in una splendida farfalla (la geome-

(1) *Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe* von prof. F. Schütte. I. Teil (Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1907); II Teil (Idem., idem, 1913).

(2) G. Daressy, *Un traité Egyptien d'une voûte elliptique* (Annales du service des Antiquités de l'Egypte, t. VIII, Le Caire, 1907); M. Simon, *Geschichte der Mathematik in Altertum in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte* (Berlin, 1909, pag. 53).

(3) Cfr. il grande trattato *De Architectura* scritto da Vitruvio all'epoca di Giulio Cesare ed Augusto.

tria descrittiva), capace di compiere voli meravigliosi per ardimento e durata.

In pari tempo le ricerche sulla *prospettiva*, rese necessarie allorquando alle pitture si volle far rendere il senso del rilievo (dote di cui mancano, ad esempio, i disegni che adornano le tombe dei Faraoni), iniziato per merito ed opera di artisti-scienziati, tipo Leonardo da Vinci, andarono grado grado svolgendosi, così da raggiungere quella forma definitiva, dovuta ad uno dei gloriosi epigoni di Newton — Brook Taylor — e che mezzo secolo fa Guglielmo Fedler ritrovò per proprio conto. Così venne eretta la seconda delle robuste colonne su cui oggi riposa la disciplina di cui ragioniamo, cioè la *proiezione centrale*, come metodo di rappresentazione delle figure a tre dimensioni.

D'altra parte le esigenze della topografia conducevano a stabilire e dare contenuto ed aspetto scientifici al *metodo dei piani quotati*; e, più tardi, questioni di cristallografia teorica conducevano all'*assonometria ortogonale*, ramo bellissimo delle matematiche, già intravveduto da Desargues (il Monge del suo secolo, come ebbe a chiamarlo il Poncelet) e che si allargò ben presto in modo da comprendere l'*assonometria obliqua* (avente per nocciolo il celebre « teorema di Pohlke ») e da ultimo l'*assonometria prospettiva*.

Finalmente le applicazioni della fotografia al rilievo dei terreni (nelle quali l'Italia, grazie all'Istituto geografico militare, seppe conquistare una posizione eminente) fecero sorgere un florido virgulto sul vetusto tronco della geometria descrittiva, la *fotogrammetria teorica*, che, a parer nostro, ha un diritto indiscutibile ad un posto stabile in tutte le esposizioni complete della disciplina che ci occupa. In conformità a siffatto modo di vedere l'ultimo dei cinque libri, costituenti il I dei volumi che mi pregio di presentare, è appunto dedicato alla fotogrammetria teorica.

Tale volume, avendo per tèma una trattazione dei principali metodi propri della geometria descrittiva, comincia (a differenza di quanto da tempo si suole praticare in Italia, seguendo l'esempio dato dal Fiedler) con la doppia projezione ortogonale (Libro I), metodo che è didatticamente il più semplice e praticamente il più utile; segue (Libro II) la projezione centrale e poi il metodo dei piani quotati (Libro III), svolto, al pari dei precedenti, con molti particolari, intesi specialmente a dar modo di esaurire, per ogni problema, tutti quei casi nei quali per la situazione speciale dei dati rispetto agli elementi di riferimento, è vietata l'applicazione delle procedure generali. Inoltre si è avuto cura di porre in luce come, sostituendo, ai consueti procedimenti di rappresentazione degli enti fondamentali della geometria, altri equivalenti riuscisse possibile surrogare certe costruzioni classiche con altre completamente simmetriche o per altre ragioni preferibili. Così il determinare, nel metodo della projezione centrale, un punto col mezzo della sua projezione e di un piano (invece che di una retta) che lo contiene [1], abilita a costruire in modo simmetrico la traccia e la retta di fuga del piano determinato da tre punti non collineari [2]; mentre l'individuare, nello stesso metodo, un punto mediante la sua projezione ed un certo numero, oltre ad essere l'unico sistema di determinazione di un punto che non contenga alcun ingrediente arbitrario [3], rende possibile la ricerca degli elementi descrittivi della retta che unisce due dati punti, indipendentemente dalla previa risoluzione di altri problemi fondamentali di posizione [4]. D'altra parte va tenuto presente che l'ordine in cui, in base alla loro difficoltà, vanno considerati i varî problemi di geometria descrittiva, è, non assoluto, ma relativo al sistema di rappresentazione che si usa. Ad esempio, mentre nel metodo di Monge ed in quello dei piani quotati sembra incontestabile che la ricerca della distanza fra due punti meriti il primo posto fra le questioni di indole metrica, quando invece si usi il metodo della projezione centrale giova cominciare dalla ricerca della distanza fra due piani paralleli, dal momento che questa si compie con notevole facilità e che ne sono corollari quasi immediati le soluzioni di altri problemi interessanti, quale (per citare un solo esempio) la determinazione dei piani bisettori di un dato diedro [5]. Tutto ciò possiede un'importanza teorica e pratica indiscutibile, giacchè, come nelle questioni di algebra e di analisi, ogni semplificazione nel calcolo che guida alla loro risoluzione costituisce un effettivo progresso, così nelle discipline grafiche il risparmio di una o più rette consente di conseguire maggiore esattezza e più grande rapidità, epperò merita il nome di perfezionamento scientifico.

Oltre ai tre suindicati esistono altri metodi per rappresentare sul piano le figure a tre dimensioni; ma non ci parve abbiano raggiunto tale importanza da meritare uno studio completo: però un cenno venne fatto della projezione centrale generalizzata, perchè così fu possibile di fare scaturire da un unico principio due importanti metodi di rappresentazione, cioè l'ordinaria projezione centrale ed i piani quotati.

Finalmente, riguardo all'*assonometria* (Libro IV) e la *fotogrammetria* (Libro V), ne vennero, accuratamente adunati e coordinati tutti i fondamenti dottrinali [6], lasciando alle opere destinate esclusivamente ai pratici il dar

(1) Tale innovazione venne approvata dal Fiedler che l'introdusse nell'ultima edizione del suo trattato *Die darstellende Geometrie* (I Tl., IV Aufl., Leipzig, 1904).

(2) Cfr. l'articolo *Sur quelques problèmes élémentaires de la géométrie descriptive à 3 ou 4 dimensions* (Arch. f. Math. u. Phys., III Reihe, II Bd., 1902).

(3) Ci esprimiamo così perchè la determinazione di un punto col mezzo della sua projezione e di una retta od un piano è possibile in ∞^2 modi differenti.

(4) Ved. la nota *Projezione centrale ed omotetia* (Periodico di matematica, t. XXVIII, 1913).

(5) Ved. la nota *Intorno ad alcuni problemi metrici che s'incontrano in geometria descrittiva* (Periodico di matematica, t. XXIII, 1908).

(6) Per la prima volta venne introdotta anche l'*assonometria prospettiva*.

notizia di quegli ulteriori espedienti che deve conoscere chi voglia applicare quei metodi a questioni concrete.

* * *

La parte II delle presenti *Vorlesungen* ha per còmpito di dare notizia delle applicazioni che hanno sinora ricevuti i metodi esposti allo studio ed alla rappresentazione delle principali figure che s' incontrano in geometria: angoli poliedri e solidi poliedri, curve e superficie. Ivi la parte di protagonista è affidata al metodo di Monge: tuttavia fu nostra cura costante il porre in luce che anche gli altri metodi della geometria decrittiva possono prestare servigi veramente preziosi. Così, mentre le questioni concernenti i poliedri vennero sempre trattate giovandosi esclusivamente della doppia projezione ortogonale, noi abbiamo mostrato come le costruzioni dell' intersezione di un poliedro con un piano o con una retta possano effettuarsi, senza eccessive complicazioni, anche col mezzo della projezione centrale o dei piani quotati: col primo di tali metodi ricorrendo allo stesso artificio che serve quando si usa il metodo di Monge, cioè mediante cambiamento degli elementi di riferimento (espediente questo utile in *molti* casi, se non in *tutti*, come pretendevano un tempo i ciechi seguaci di T. Olivier); col secondo ricorrendo ad una considerazione aritmetico-geometrica pienamente conforme alla duplice natura, numerica e spaziale, del metodo dei piani quotati.

Passando ad occuparci delle figure limitate da linee non tutte rette e da superficie non tutte piane, è necessario constatare che non esiste sinora alcuna trattazione sintetica rigorosa e completa delle curve e delle superficie, nemmeno restringendosi agli enti algebrici (il che, d'altronde, costituirebbe una non desiderata limitazione del campo di applicazione della geometria descrittiva): per convincersene basta osservare che la pura geometria non è attualmente in grado di stabilire, anzi nemmeno di enunciare, le condizioni di esistenza della tangente ad una linea o del piano tangente ad una superficie. In conseguenza si è giudicato opportuno di stabilire i fondamenti della teoria delle curve e delle superficie col mezzo di coordinate e di equazioni. È un metodo forse non definitivo, che, anzi, gli amanti della pura geometria augureranno sia di transizione, ma che oggi è l' unico che concili semplicità, generalità e rigore; è un metodo che, d' altronde, corrisponde perfettamente alle tendenze odierne delle matematiche, nelle quali oggi imperano piuttosto i metodi *misti* che i metodi *puri*: se, pertanto, venne diggià operata la fusione della planimetria con la stereometria, della geometria projettiva con la geometria analitica, del calcolo differenziale col calcolo integrale, non sembrerà certamente strano che siasi tentato di riunire in un tutto organico la geometria descrittiva colla geometria infinitesimale [1].

[1] Giova rilevare che questa fusione è in perfetto accordo con le idee del creatore della Geometria Descrittiva. Infatti Monge, come attesta il Delambre (*Rapport historique*

Aggiungiamo che alla teoria delle curve piane fu data un'estensione un po' maggiore di quanto venne fatto nei più antichi trattati sulla materia, considerando che tutti i problemi di geometria descrittiva si riducono, in ultima analisi, alla delineazione di curve situate nel piano del disegno ed alla determinazione degli elementi comuni a due di esse, onde una estesa conoscenza della teoria delle linee piane sembra indispensabile per chiunque intenda rendersi famigliare il maneggio della geometria descrittiva.

Nè va taciuto che, per addurre un esempio di una curva a doppia curvatura algebrica non definita come intersezione di due superficie, si è attinto ad una fonte antichissima ma sempre fresca, la *Collezione matematica* di Pappo Alessandrino, ove, come analoga nello spazio della spirale d' Archimede, è considerata e parzialmente investigata una curva razionale del 10° ordine che offre istruttive applicazioni dei procedimenti generali di rappresentazione delle linee a doppia curvatura [1].

La teoria generale delle superficie viene applicata alle più importanti classi di tali enti che s' incontrano in teoria ed in pratica: quàdriche, superficie coniche e cilindriche, superficie rigate, superficie di rotazione, superficie elicoidi. Quando si vogliano usare i metodi della geometria descrittiva allo studio di una di tali figure, per evitare eccessive complicazioni grafiche, si suppone ordinariamente di averle collocate in posizioni speciali rispetto agli elementi di riferimento e che i dati assunti per determinarle abbiano (per così esprimerci) una determinata « forma canonica ».

Ora la prima di siffatte supposizioni s' impone bene spesso quando si vogliano evitare le costruzioni tanto laboriose da spaventare il più intrepido disegnatore: così, volendo rappresentare una quadrica determinata da nove punti arbitrari o generata da due stelle reciproche, si va incontro a tali complicazioni che ben presto si è costretti a rinunciare; mentre se, per converso, si suppone di riferirla a tre piani (orizzontale, verticale, di profilo) paralleli ai piani principali della superficie e di individuarla col mezzo delle corrispondenti sezioni piane, ci si trova di fronte a questioni le cui difficoltà possono sormontarsi sfruttando le vastissime cognizioni che oggi possediamo intorno alle curve di second'ordine. Un saggio di siffatte questioni è rappresentato dal cap. II del libro III della II parte di queste *Vorlesungen*.

---

sur les progrès des sciences mathématiques, Paris, 1810, pag. 41) diede in origine alla sua esposizione di tale materia il titolo di *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie descriptive*; ed inoltre ebbe a dichiarare che, se avesse dovuto rifare la sua opera *De l'analyse appliquée à la géométrie*, l'avrebbe scritta in due colonne, esponendo nella prima le dimostrazioni analitiche e nella seconda le dimostrazioni coi metodi della Geometria Descrittiva (ved. T. Olivier nella Prefazione al suo *Cours de géométrie descriptive*, Paris, 1843).

(1) Ved. la memoria *La spirale de Pappus* (Archiv. f. Math. u. Phys., III Reihe, XII Bd., 1907).

La seconda delle supposizioni surriferite teoricamente è legittima, ma dà luogo in pratica a gravi inconvenienti: chè è ben vero che una « forma canonica » è un sistema di dati a cui si può sempre ridursi; ma vi si giunge di regola col mezzo di costruzioni che, oltre essere complicate, guidano a risultati di scarsissima precisione ([1]); onde della riduzione a « forma canonica » è consigliabile di far l'uso più limitato possibile. In certi casi, volendo evitare le forme canoniche, si cade in costruzioni di spaventevole complicazione; ma in altri le « forme canoniche » non trovano altra giustificazione se non nella tradizione, che si segue automaticamente senza sufficiente ragione. Così il determinare una superficie conica o cilindrica mediante la sua traccia sopra uno dei piani di riferimento generalmente non arreca alcuna sostanziale semplificazione alle costruzioni relative a quelle superficie corrispondenti, nell'ipotesi in cui se ne dia la base sopra un piano arbitrario, come viene dimostrato dalla ricerca della curva d'intersezione di due di quelle superficie ([2]); che se poi si vuole scegliere come basi di tutte le superficie coniche o cilindriche da considerare le loro intersezioni con un piano fisso, meglio assai è di eleggere il così detto « secondo piano bisettore », chè allora tutte le costruzioni assumono una forma elegante e perfettamente simmetrica ([3]). Similmente: per rappresentare col metodo di Monge una superficie di rivoluzione è costume di assegnarne (oltre l'asse) il « meridiano principale »: ora la miglior parte delle costruzioni classiche relative a una tale superficie si mantengono inalterate supponendola individuata, invece, col mezzo di una linea arbitraria, vincolata dall'unica condizione di incontrare tutti i paralleli della superficie.

Tali esempi potrebbero moltiplicarsi. Ma quelli addotti sono sufficienti a provare come la geometria descrittiva classica possa ricevere un perfezionamento analogo a quello che la geometria analitica conseguì nel secolo scorso, sotto la benefica influenza del genio di Lagrange: come questa disciplina procedette costantemente assillata dall'aspirazione di emanciparsi da una scelta particolare degli elementi di riferimento, così quella deve proporsi di operare nelle ipotesi più generali riguardo alla posizione dei dati, evitando, entro i limiti del possibile, di usare come elementi ausiliari curve tracciate per punti e sforzandosi di servirsi soltanto della retta e del cerchio, o tutt'al più di qualche curva di natura nota e di facile descrizione.

* * *

Tali considerazioni intorno all'esattezza ed alla semplicità delle costruzioni della geometria descrittiva ([4]), mostrano come chi coltiva tale di-

([1]) In tali condizioni si trova evidentemente una linea tracciata per punti.

([2]) Ved. la figura 45 del manuale *Poliedri, curve e superficie secondo i metodi della Geometria Descrittiva* (Milano, Hoepli, 1912).

([3]) Vedi ad es. la figura 46 del su citato manuale.

([4]) I primi cultori della geometria descrittiva, non soltanto non pensarono nemsciplina debba tenere costantemente presenti i risultati dei geniali studi che vennero compiuti da Lorenzo Mascheroni (il creatore della *Geometria del compasso*), per bandire l'uso di uno strumento non degno di fiducia (la riga), e da E. Lemoine (l'inventore della *geometrografia*), per paragonare fra di loro le varie soluzioni di uno stesso problema, onde poi decidere quale è la migliore. Appunto per tale ragione le presenti *Vorlesungen* cominciano con alcune generalità intorno alla semplicità ed all'esattezza delle costruzioni geometriche, le quali sono destinate ad orientare la mente del lettore verso l'investigazione dai procedimenti grafici che menano per la via più spedita al risultato più preciso possibile [1]. I limiti dell'opera non consentirono di dilungarci nell'applicazione dei concetti stabiliti; ma quanto è esposto può riguardarsi come un primo tentativo di raccogliere in un tutto quanto venne sinora pensato e scritto intorno alle costruzioni geometriche nel piano e nello spazio.

*
* *

Una parte III di queste *Vorlesungen*, destinata all'esposizione della *Storia della geometria descrittiva*, trovasi attualmente in via di preparazione; essa servirà di complemento alle due prime e venne ad esse posposta considerando che la storia di una scienza può essere compresa e riuscire utile soltanto a coloro che di tale scienza conoscono almeno i fondamenti.

---

meno alla possibilità di considerazioni siffatte, ma neppure mostrarono di preoccuparsi dell'effettuabilità di certe costruzioni e mai si chiesero se, riducendo un problema ad un altro, si accostassero realmente alla soluzione del primo. Veramente tipico a tale riguardo è il seguente sedicente «metodo per costruire la tangente ad una curva qualunque» proposto dall'Hachette: Si prendano ad arbitrio due rette sghembe a e b e si consideri la rigata costituita dalle rette che incontrano ad un tempo a, b e la curva data, si costruisca il piano che la tocca in un punto P di tale curva; esso conterrà la retta tangente in P a questa curva; sostituendo alle a, b altre due rette si otterrà un altro piano contenente la retta richiesta, onde questa risulta individuata come intersezione di due piani.

[1] Siffatto modo di vedere venne dopo di noi adottato da E Papperitz nell'articolo *Darstellende Geometrie* dell'*Encyklopädie der mathem. Wissenschaften*.