ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1º SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Matematica. — *Sul calcolo della funzione di Green per le equazioni differenziali e integro-differenziali di tipo parabolico.* Nota di G. C. Evans (Houston, U. S. A.) presentata dal Socio V. Volterra.

Il prof. Hilbert ha esposto, nel suo recente libro sulle equazioni integrali [1], un bel metodo per trovare la funzione di Green per l'equazione differenziale di tipo ellittico $L(u) + \lambda u = 0$, data quella per l'equazione $L(u) = 0$. Questo metodo dà risultati interessanti, se è applicato ad equazioni di altri tipi. In questa Nota deduco la formola per la funzione di Green per l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t)\, u(x, t) \tag{1}$$

e poi per l'equazione integro-differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = \int_{t_x}^{t} A(x, t, \tau)\, u(x, \tau)\, d\tau\,, \tag{2}$$

in cui t_x sarà definito in seguito [2]. La (2) si può generalizzare in più modi.

1. In primo luogo è necessario definire la funzione di Green. Considereremo un campo σ, indicandolo anche col simbolo ${}_{t_0}\sigma_{t_1}$, il cui contorno, chiamato dal prof. Levi *di seconda specie* [3], è composto delle linee $t = t_0$, $t = t_1$, $x = \xi_1(t)$, $x = \xi_2(t)$, ove le funzioni $\xi_1(t)$ e $\xi_2(t)$ sono, colle loro derivate del primo ordine, continue per $t_0 \leq t \leq t_1$. Indicheremo questo contorno, senza la retta $t = t_1$, preso nel senso positivo, col simbolo ${}_{t_0}s_{t_1}$.

Diremo che una funzione $u(x, t)$ è regolare in ${}_{t_0}\sigma_{t_1}$, se $u(x, t)$ e $\dfrac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ sono limitate e continue in σ, e $\dfrac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$ e $\dfrac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ sono continue fuorchè lungo certe linee distribuite in modo regolare, e integrabili $\left(\text{cioè tali che } \int \dfrac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\, dx = \dfrac{\partial u(x, t)}{\partial x} \text{ ecc.}\right)$.

(1) D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen theorie der linearen Integralgleichungen* [Lipsia, 1912], a pag. 63.

(2) Per questa equazione e per i relativi teoremi di esistenza vedi Evans: *The reduction of certain types of integro-differential equations*, cap. II [da pubblicarsi nelle Transactions of the American Mathematical Society]. Citeremo questa Memoria in seguito colla lettera α.

(3) E. E. Levi, *Sull'equazione del calore* [Annali di Matematica, 1908] a pag. 199. Citeremo questa Memoria in seguito colla lettera β.

La funzione di Green per l'equazione (1) sarà una funzione $G(x, t|x_1, t_1)$, soluzione dell'equazione aggiunta alla (1):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial t} = A(x, t)\, v \tag{3}$$

tale che si abbia

$$G(x, t|x_1, t_1) = h_{0\frac{1}{2}}(x, t|x_1, t_1) + G'(x, t|x_1, t_1) \tag{3'}$$

in cui col prof. Levi (vedi β a pag. 201) poniamo

$$h_{\alpha\beta}(x, t|x_1, t_1) = \frac{(x_1 - x)^\alpha}{(t_1 - t)^\beta} e^{-\frac{(x_1 - x)^2}{4(t_1 - t)}} .$$

$G'(x, t|x_1, t_1)$ sarà una funzione regolare, la quale prenderà in modo continuo i valori

$$\begin{aligned} &G'(x, t|x_1, t_1) = 0 && \text{lungo } t = t_1 \\ &G'(x, t|x_1, t_1) = -h_{0\frac{1}{2}}(x, t|x_1, t_1) && \text{lungo } x = \xi_1(t) \text{ e lungo } x = \xi_2(t), \end{aligned} \tag{3''}$$

se (x_1, t_1) è dentro al campo σ, non sul contorno.

È facile dimostrare che la funzione G è univocamente determinata, e che, se esiste, si avrà

$$u(x_1, t_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_0 s t_1} u(x, t) \left\{ G(x, t|x_1, t_1)\, dx - \frac{\partial}{\partial x} G(x, t|x_1, t_1)\, dt \right\}, \tag{4}$$

purchè $u(x, t)$ sia soluzione regolare della (1), continua al contorno di σ.

2. Si è stabilito il fatto che, data una catena continua di valori lungo s, esiste una e una sola soluzione regolare dell'equazione (1) tale che prenda in modo continuo quei valori al contorno, purchè la funzione $A(x, t)$ sia limitata, continua, e abbia una derivata continua rispetto alla t [1], oppure sia limitata, continua e soddisfi alla condizione del Levi [2]. L'ultima ipotesi è la nostra. Questa soluzione soddisfa all'equazione integrale

$$u(x, t) = u'(x_1, t_1) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{t_0 \sigma t_1} A(x, t)\, g(x, t|x_1, t_1)\, u(x, t)\, d\sigma , \tag{5}$$

in cui $g(x, t|x_1, t_1)$ è funzione di Green per l'equazione $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$,

[1] W. H. Hurwitz, *Randwertaufgaben bei Systemen von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* [Diss. Göttingen, 1910], a pag. 88. Vedi anche β, § 2, e α, cap. II.

[2] Vedi β a pag. 239, per questa condizione.

e $u'(x_1, t_1)$ è la soluzione di quell'equazione prendendo i dati valori sul contorno, e cioè

$$(5')\qquad u'(x_1, t_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_0 s t_1} u(x, t) \left\{ g(x, t | x_1, t_1)\, dx - \frac{\partial}{\partial x} g(x, t | x_1, t_1)\, dt \right\}.$$

L'equazione (5) ha l'unica soluzione seguente:

$$(6)\qquad u(x_1, t_1) = u'(x_1, t_1) - \iint_{t_0 \sigma t_1} \gamma(x, t | x_1, t_1)\, u'(x, t)\, d\sigma,$$

in cui $\gamma(x, t | x_1, t_1)$ è la funzione associata (¹) alla funzione

$$\frac{A(x, t)}{2\sqrt{\pi}} g(x, t | x_1, t_1)$$

per mezzo della *relazione di Volterra* pel campo considerato (vedi α, cap. II):

$$(7)\qquad \gamma(x, t | x_1, t_1) + \frac{A(x, t)}{2\sqrt{\pi}} g(x, t | x_1, t_1) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{t \sigma t_1} \gamma(x, t | \xi, \tau)\, A(\xi, \tau)\, g(\xi, \tau | x, t)\, d\sigma =$$

$$= \frac{A(x, t)}{2\sqrt{\pi}} \iint_{t \sigma t_1} g(x, t | \xi, \tau)\, \gamma(\xi, \tau | x_1, t_1)\, d\sigma .$$

Consideriamo ora la funzione

$$(8)\qquad -\frac{2\sqrt{\pi}}{A(x, t)} \gamma(x, t | x_1, t_1) = g(x, t | x_1, t_1) -$$

$$- \iint_{t \sigma t_1} g(x, t | \xi, \tau)\, \gamma(\xi, \tau | x_1, t_1)\, d\sigma .$$

Abbiamo il teorema:

Se $\gamma(x, t | x_1, t_1)$ *è la funzione associata a* $\dfrac{A(x, t)}{2\sqrt{\pi}} g(x, t | x_1, t_1)$ *per mezzo della relazione di Volterra* (7) *pel dato campo* σ, *allora la funzione di Green per l'equazione* (1) *è*

$$G(x, t | x_1, t_1) = -\frac{2\sqrt{\pi}}{A(x, t)} \gamma(x, t | x_1, t_1) .$$

(¹) È nucleo dell'equazione risolvente dell'equazione integrale di cui il nucleo è la funzione data.

3. Infatti, si dimostra facilmente che la funzione $\gamma(x\,,t|x_1\,,t_1)$ come funzione di x e t, purchè $(x,t) \neq (x_1\,,t_1)$, soddisfa alla condizione di E. Levi (vedi α cap. II, § 5). Ne segue, se poniamo $G = h_{0\frac{1}{2}} + G'$, in cui sia

$$G'(x\,,t|x_1\,,t_1) = g'(x\,,t|x_1\,,t_1) - \iint\limits_{t\sigma_{t_1}} g(x\,,t|\xi\,,\tau)\,\gamma(\xi\,,\tau|x_1\,,t_1)\,d\sigma\,,$$

che la $G'(x,t|x_1,t_1)$ è funzione regolare in x,t, purchè (x,t) sia dentro σ, non sul contorno. Per vedere ciò, è necessario solamente riguardare le formole esplicite per le derivate [1]. Inoltre si ha ovviamente dalla (8) che la $G'(x\,,t|x_1\,,t_1)$ soddisfa alle condizioni (3''), pel contorno.

Finalmente, se calcoleremo l'espressione differenziale $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \dfrac{\partial G}{\partial t}$, avremo dalla (8) e dalle formole esplicite per le derivate

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial G}{\partial t} &= 0 - 2\sqrt{\pi}\,\gamma(x\,,t|x_1\,,t_1)\\ &= A(x\,,t)\,G(x\,,t|x_1\,,t_1)\,,\end{aligned}$$

e quindi la $G(x\,,t|x_1\,,t_1)$ è la desiderata funzione di Green per l'equazione (1).

Nel solito modo si dimostra che $H(x\,,t|x_1\,,t_1) = G(x_1\,,t_1|x\,,t)$ è la funzione di Green per l'equazione aggiunta (3).

4. Consideriamo finalmente l'equazione integro-differenziale (2). Rispetto al càmpo σ assumiamo, oltre le condizioni specificate nel principio, che $\xi_1'(t)$ sia < 0 e $\xi_2'(t) > 0$ [2]. Con $(x\,,t_x)$ denotiamo quel punto del contorno di cui una coordinata è x. Rispetto alla $A(x\,,t\,,\tau)$, supponiamo che essa sia continua nelle tre variabili $x\,,t\,,\tau$ e soddisfi alla condizione del Levi, essendo $(x\,,t)$ e $(x\,,\tau)$ punti dentro σ.

La soluzione della (2) determinata per mezzo di una catena continua di valori sul contorno ${}_{t_0}s_{t_1}$ si può scrivere come la soluzione dell'equazione integrale

$$u(x_1\,,t_1) = u'(x\,,t) + \iint\limits_{t_0\sigma_{t_1}} K(x\,,t|x_1\,,t_1)\,u(x\,,t)\,d\sigma, \tag{9}$$

essendo $u'(x_1\,,t_1)$ la funzione definita colla (5), e $K(x\,,t|x_1\,,t_1)$ la funzione

$$K(x\,,t|x_1\,,t_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_t^{t_1} g(x\,,t|x_1\,,t_1)\,A(x\,,\tau\,,t)\,d\tau\,. \tag{10}$$

[1] Vedi β, § 22 Infatti, si deve far uso dell'analisi corrispondente per l'equazione aggiunta.

[2] Pel campo prima specificato si ha un'equazione integro-differenziale diversa, ma la generalizzazione non è difficile.

Quindi si ha

$$(10') \qquad u(x_1\,,t_1) = u'(x_1\,,t_1) - \iint\limits_{t_0{}^{\sigma}t_1} k(x\,,t|x_1\,,t_1)\,u'(x\,,t)\,d\sigma\,,$$

in cui $k(x\,,t|x_1\,,t_1)$ è determinata per mezzo della *relazione di Volterra* pel dato campo (vedi α, cap. II):

$$(11) \qquad k(x\,,t|x_1\,,t_1) + \mathrm{K}(x\,,t|x_1\,,t_1) = \iint\limits_{t^{\sigma}t_1} k(x\,,t|\xi\,,\tau)\,\mathrm{K}(\xi\,,\tau|x_1\,,t_1)\,d\sigma$$
$$= \iint\limits_{t^{\sigma}t_1} \mathrm{K}(x\,,t|\xi\,,\tau)\,k(\xi\,,\tau|x_1\,,t_1)\,d\sigma\,.$$

5. Formiamo ora la funzione

$$(12) \qquad \mathrm{S}(x\,,t|x_1\,,t_1) = g(x\,,t|x_1\,,t_1) - \iint\limits_{t^{\sigma}t_1} g(x\,,t|\xi\,,\tau)\,k(\xi\,,\tau|x_1\,,t_1)\,d\sigma$$

che chiameremo *funzione di Green estesa* per l'equazione (2). Infatti, si dimostra facilmente che è regolare, e come si vede per mezzo della (11), è soluzione dell'equazione aggiunta seguente

$$(13) \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t} = \int_t^{t_1} \mathrm{S}(x\,,\tau|x_1\,,t_1)\,\mathrm{A}(x\,,\tau\,,t)\,d\tau\,,$$

e si può scrivere nella forma (3'), sotto le condizioni (3'').

Per mezzo di un cambiamento nell'ordine dell'integrazione analogo a quello per mezzo del quale si stabilisce la (13), abbiamo il fatto che

$$\iint\limits_{t_0{}^{\sigma}t_1} \Big\{ v(x\,,t) \int_{t_x}^{t} \mathrm{A}(x\,,t\,,\tau)\,u(x\,,\tau)\,d\tau -$$
$$- u(x\,,t) \int_t^{t_1} \mathrm{A}(x\,,\tau\,,t)\,v(x\,,\tau)\,d\tau \Big\}\,d\sigma = 0$$

purchè $u(x\,,t)$ e $v(x\,,t)$ siano funzioni limitate e continue.

Ne segue che, trasformando l'integrale doppio dell'espressione

$$v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) - u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

nel solito modo, abbiamo il teorema seguente:

Se $\mathrm{S}(x\,,t|x_1\,,t_1)$ *è la funzione di Green estesa per l'equazione* (2), *la funzione*

$$(14) \quad u(x_1\,,t_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{t_0{}^{s}t_1} u(x\,,t) \Big\{ \mathrm{S}(x\,,t|x_1\,,t_1)\,dx - \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{S}(x\,,t|x_1\,,t_1)\,dt \Big\}$$

è la soluzione della (1) *definita per mezzo della catena continua di valori* $u(x, t)$ *sul contorno* ${}_{t_0}s_{t_1}$.

6. Sono giunto alle formole per queste funzioni di Green (8) e (12), non col metodo esposto, che è simile a quello del Hilbert, ma con un cambiamento di variabili nelle formole per le soluzioni delle equazioni differenziali e integro-differenziali di tipo parabolico, cercando così di scriverle come integrali lineari (vedi la (4) e la (14)) invece di integrali doppî, come sono espresse le soluzioni già ottenute (vedi la (6) e la (10′)).

Notisi che la funzione di Green estesa che abbiamo trovato per la (2) non è funzione di Green nel senso consueto, perchè l'espressione $\{v\mathrm{L}(u) - u\mathrm{M}(v)\}\, d\sigma$, in cui $\mathrm{L}(u)$ e $\mathrm{M}(v)$ sono le espressioni aggiunte integro-differenziali, non è differenziale esatta come nella teoria delle equazioni differenziali, ma si distingue da quella forma per mezzo di un termine il quale s'annulla solo quando viene integrato *sopra tutto il campo* σ. Nè si riduce per il metodo della moltiplicazione simbolica ad una funzione di Green, perchè in quel metodo, che s'applica alle equazioni integro-differenziali in cui la variabile di integrazione non comparisce fra quelle di differenziazione, si ha, colla moltiplicazione simbolica, ma non con quella ordinaria che $\eta\mathrm{L}(\xi) - \mathrm{M}(\eta)\,\xi = 0$. Ma d'altra parte la funzione data dalla (12) si esprime in forma *chiusa* per mezzo della funzione di Green per l'equazione differenziale, e le funzioni di Green simboliche non hanno apparentemente quel vantaggio.

Matematica. — *Sull'esistenza della soluzione, in problemi di calcolo delle variazioni.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

I teoremi che finora si conoscono, circa l'esistenza del minimo per l'integrale $\int_C \mathrm{F}\,ds$, presuppongono tutti la condizione fondamentale dell'essere la F funzione costantemente positiva, non nulla. Si presentano però alcuni problemi per i quali l'ipotesi suddetta non risulta del tutto verificata, problemi cioè in cui la F, pur restando di segno costante, può anche annullarsi nel campo che si considera. Un caso particolare importante, in cui appunto si va incontro all'annullamento detto, viene studiato nella prima parte della presente Nota. E vi si dimostra l'esistenza del minimo se l'integrale è del tipo $\int f(y)\,ds$, con $f(y)$ funzione non negativa e non decrescente. Questa proposizione trova applicazione in molti problemi anche classici, come, per esempio, quello della superficie d'area minima generata dalla rotazione, intorno ad un asse, di una curva passante per due punti dati.