ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

è la soluzione della (1) *definita per mezzo della catena continua di valori* $u(x, t)$ *sul contorno* ${}_{t_0}s_{t_1}$.

6. Sono giunto alle formole per queste funzioni di Green (8) e (12), non col metodo esposto, che è simile a quello del Hilbert, ma con un cambiamento di variabili nelle formole per le soluzioni delle equazioni differenziali e integro-differenziali di tipo parabolico, cercando così di scriverle come integrali lineari (vedi la (4) e la (14)) invece di integrali doppî, come sono espresse le soluzioni già ottenute (vedi la (6) e la (10′)).

Notisi che la funzione di Green estesa che abbiamo trovato per la (2) non è funzione di Green nel senso consueto, perchè l'espressione $\{v\mathrm{L}(u) - u\mathrm{M}(v)\}\, d\sigma$, in cui $\mathrm{L}(u)$ e $\mathrm{M}(v)$ sono le espressioni aggiunte integro-differenziali, non è differenziale esatta come nella teoria delle equazioni differenziali, ma si distingue da quella forma per mezzo di un termine il quale s'annulla solo quando viene integrato *sopra tutto il campo* σ. Nè si riduce per il metodo della moltiplicazione simbolica ad una funzione di Green, perchè in quel metodo, che s'applica alle equazioni integro-differenziali in cui la variabile di integrazione non comparisce fra quelle di differenziazione, si ha, colla moltiplicazione simbolica, ma non con quella ordinaria che $\eta\mathrm{L}(\xi) - \mathrm{M}(\eta)\,\xi = 0$. Ma d'altra parte la funzione data dalla (12) si esprime in forma *chiusa* per mezzo della funzione di Green per l'equazione differenziale, e le funzioni di Green simboliche non hanno apparentemente quel vantaggio.

Matematica. — *Sull'esistenza della soluzione, in problemi di calcolo delle variazioni.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

I teoremi che finora si conoscono, circa l'esistenza del minimo per l'integrale $\int_{\mathrm{C}} \mathrm{F}\,ds$, presuppongono tutti la condizione fondamentale dell'essere la F funzione costantemente positiva, non nulla. Si presentano però alcuni problemi per i quali l'ipotesi suddetta non risulta del tutto verificata, problemi cioè in cui la F, pur restando di segno costante, può anche annullarsi nel campo che si considera. Un caso particolare importante, in cui appunto si va incontro all'annullamento detto, viene studiato nella prima parte della presente Nota. E vi si dimostra l'esistenza del minimo se l'integrale è del tipo $\int f(y)\, ds$, con $f(y)$ funzione non negativa e non decrescente. Questa proposizione trova applicazione in molti problemi anche classici, come, per esempio, quello della superficie d'area minima generata dalla rotazione, intorno ad un asse, di una curva passante per due punti dati.

Nella seconda parte della Nota si prende in considerazione un'altra singolarità degli integrali da render minimi. In tutti i ragionamenti del metodo classico del calcolo delle variazioni, ed anche in quelli che siamo andati sviluppando nei nostri precedenti lavori, si suppone sempre che la funzione da integrare resti costantemente finita e continua. Possono peraltro presentarsi casi (anche comuni) in cui la finitezza della funzione integranda viene a mancare. Per convincersene, basta pensare al problema che ha dato origine al calcolo delle variazioni: a quello della brachistocrona di un punto pesante. Se ci si mette nell'ipotesi, che sembra la più semplice, del punto abbandonato con velocità iniziale nulla; si è condotti precisamente a render minimo l'integrale di una funzione che è infinito proprio nella posizione iniziale. Per problemi di questa natura dò un teorema d'esistenza (n. 5), sotto condizioni che facilmente si verificano.

1. Occorre premettere il

LEMMA. — *Sia* G *una varietà di curve continue, rettificabili, date in un campo limitato. Se esistono due direzioni distinte, tali che ogni parallela all'una o all'altra contenga, di ciascuna curva della varietà, oltre a tratti continui, solo un numero di punti sempre minore di un numero fisso* K — *allora le curve della varietà hanno lunghezze tutte inferiori ad uno stesso numero, e la varietà è compatta* (¹).

Si costruisca un parallelogramma che contenga in sè tutte le curve della varietà data e i cui lati abbiano le due direzioni di cui sopra. Siano a e b due suoi lati consecutivi, e se ne indichino le lunghezze con le stesse lettere. Considerata una qualunque curva C di G, si osservi che, per la sua rettificabilità e per un noto teorema di Cantor, è numerabile l'insieme J delle parallele ad uno qualunque dei lati a o b che ne contengono un tratto continuo (arco). Si inscriva arbitrariamente a C una poligonale P, il cui lato generico indicheremo con l. Se l non ha la direzione di b, una parallela qualunque a questo lato del parallelogramma o non l'incontra o l'incontra in un sol punto. Nel secondo caso, la retta considerata, se non appartiene a J, incontra certamente l'arco di C che corrisponde a l (e che ha gli stessi estremi) in almeno un punto non appartenente a tratti comuni alla retta ed alla curva. Ne viene che ogni retta parallela a b e non facente parte di J incontra P in un numero di punti isolati eventualmente nullo, ma sempre inferiore a K. E se ne deduce che, considerando i valori assoluti delle proiezioni dei lati di P su a, fatte nella direzione data da b, la loro somma resta inferiore a Ka, perchè nessun tratto del lato a può essere la proiezione di lati o parti di lati di P in numero uguale o superiore a K. Se infatti, così fosse, vi sarebbe, per la numerabilità di J una

(¹) Per la definizione di insieme *compatto*, vedi M. Fréchet, *Sur quelques point du calcul fonctionnel* (Rend. Circ. mat. di Palermo, tom. XXII, 1906).

retta (anzi, infinite) parallela a b, non appartenente ad J, che incontrebbe P in un numero di punti isolati maggiore o eguale a K. Analogamente dicasi per le proiezioni su b, fatte nella direzione a. Se ne conclude che il perimetro di P è inferiore a $K(a+b)$, ed anche, essendo P arbitrariamente inscritto in C, che la lunghezza di C è pur essa inferiore a $K(a, b)$. Il lemma è così dimostrato.

2. Sia $f(y)$ una funzione finita e continua, sempre positiva o nulla, e non decrescente. Si considerino (per ora) un campo convesso A (tale cioè che il segmento determinato da due suoi punti qualunque giaccia ancora nel campo) ed una curva C arbitraria, continua, rettificabile, congiungente due punti P_0 e P_1, e appartenente per intero al campo A. Si inscriva nella C una poligonale π, in modo che si abbia

$$\left|\int_C f(y)\,ds - \int_\pi f(y)\,ds\right| < \varepsilon ,$$

con ε numero prefissato. π risulta appartenente al campo A. Si operi su π come segue. Si sopprima quella parte massima di π, che eventualmente congiungesse il primo suo vertice con un altro punto della parallela all'asse y passante per quel vertice stesso, e la si sostituisca col segmento rettilineo avente gli estremi del pezzo di poligonale soppresso. La nuova poligonale così risultante rende l'integrale della f minore di $\int_\pi f\,ds$. Su essa si operi come sulla π, passando al terzo vertice, oppure al secondo, se la poligonale coincidesse con π. Si operi ugualmente sull'altra poligonale risultante, relativamente al quinto vertice (oppure al quarto), e così via. Si giungerà, in tal modo, a sostituire la primitiva π con un'altra poligonale π', congiungente gli stessi punti P_0 e P_1, che soddisfa alla $\int_{\pi'} f\,ds \leq \int_\pi f\,ds$ (l'uguale sussistendo solo nel caso $\pi' \equiv \pi$) e per la quale si presenta questo fatto: ogni parallela all'asse y o non l'incontra affatto o l'incontra in un sol punto, oppure contiene un suo lato ed esso solo. Si ha poi

$$\int_{\pi'} f\,ds < \int_C f\,ds + \varepsilon .$$

Si sostituiscano ora le parti di π' che hanno ambedue gli estremi sulla parallela all'asse x condotta per P_0, e che rimangono tutte al di sopra di essa, coi segmenti rettilinei determinati dagli estremi stessi. Sulla nuova poligonale si operi come sulla π', ma relativamente alla parallela condotta per il terzo vertice (oppure per il secondo, se essa poligonale coincidesse con π'); e così via. Si giungerà ad una poligonale π'', congiungente P_0 e P_1, e soddisfacente a queste condizioni: α) $\int_{\pi''} f\,ds \leq \int_{\pi'} f\,ds < \int_C f\,ds + \varepsilon$;

β) ogni parallela all'uno o all'altro degli assi coordinati l'incontra in uno o due punti isolati al massimo, potendo eventualmente contenere anche un suo lato.

3. Quello che si è fatto nell'ipotesi del campo convesso, si può ripetere, con qualche maggiore complicazione, per un campo A qualsiasi, a connessione semplice o no, e avente un contorno composto di un numero finito di archi di curve, che per comodità supporremo analitiche. Allora ogni retta del piano conterrà, del contorno, eventualmente qualche arco ed un numero di punti isolati sempre inferiore ad un numero fisso; e presa una curva continua, rettificabile C del campo, congiungente, punti P_0 e P_1, e fissato un ε, sarà sempre possibile sostituire la C con altra curva C', pure del campo e congiungente gli stessi punti P_0 e P_1, in modo che: α) sia $\int_{C'} f ds < \int_C f ds + \varepsilon$; β) ogni parallela a l'uno o all'altro degli assi contenga di C' eventualmente degli archi e dei punti isolati, i quali ultimi in numero sempre inferiore ad un numero fisso (qualunque sia C e ε), dipendente solo dal contorno del campo.

4. Dopo ciò e giovandoci del lemma del n. 1, è facile stabilire l'esistenza del minimo per l'integrale della f nel campo A e per tutte le curve che congiungono i punti P_0 e P_1. Si scelga, infatti, una successione di curve $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ della classe detta e tali che il limite, per $n = \infty$, di $\int_{C_n} f ds$ sia il limite inferiore dell'integrale della f nella classe stessa. Preso poi un qualsiasi numero ε, positivo, arbitrario, si determini una curva C'_n di A, che congiunga P_0 e P_1 e soddisfi alla disuguaglianza

$$\int_{C'_n} f ds < \int_{C_n} f ds + \frac{\varepsilon}{n},$$

ed alla condizione β) del numero precedente. È di conseguenza

$$\lim \int_{C'_n} f ds = \lim \int_{C_n} f ds,$$

e le C'_n ammettono (n. 1) una curva limite C, almeno. Ma, per essere $f(y) \geq 0$, l'integrale della f è una funzione semicontinua, inferiormente, della linea d'integrazione [1]. È dunque

$$\int_C f ds \leq \text{Min} \lim \int_{C'_n} f ds = \lim \int_{C_n} f ds,$$

[1] H. Lebesgue, *Intégral, Langueur, Aire,* n. 83 (Annali di Matem., 1902). Una proposizione più generale è questa: « Se: 1°) è sempre $F_1(x, y, x', y') \geq 0$, dove F_1 è l'invariante di Weierstrass della solita funzione F del calcolo delle variazioni; 2°) nei

donde $\int_C f\,ds = \lim \int_{C_n} f\,ds$; e la curva C dà il minimo cercato. Si ha così la proposizione:

Se nel campo A *del n. 3, è* $f(y) \geq 0$, *con* $f(y)$ *funzione finita e continua non decrescente, allora, fra tutte le curve continue, rettificabili che congiungono due qualsiasi punti* P_0 *e* P_1 *di* A, *ve n'è sempre almeno una che rende minimo l'integrale* $\int f\,ds$.

Questa curva, eccettuati al più i punti che ha sulla retta $f(y) = 0$, soddisfa all'equazione differenziale di Eulero in tutti i suoi archi *interni* al campo.

Il teorema precedente si applica, per esempio, alla ricerca del minimo dell'integrale $\int y\,ds$, al quale si è condotti nel problema della superficie di rivoluzione d'area minima.

5. Occupiamoci ora dell'altra questione cui abbiamo accennato nell'introduzione.

Sia la funzione $f(x, y)$ finita e continua e maggiore di zero in tutti i punti del campo limitato e chiuso B, ad eccezione di quelli di un certo insieme E, nei quali diventi infinita; e precisamente, il comportamento della f nell'intorno dei punti di E sia tale che, preso un punto qualunque P di quest'insieme e un numero M positivo, grande a piacere, si possa sempre corrispondentemente determinare un numero positivo ϱ in modo che sia, per ogni punto (xy) di B, non appartenente ad E e interno al cerchio (P, ϱ),

$$f(x, y) > M .$$

Consideriamo due punti qualsiasi P_0 e P_1 di B, appartenenti o no ad E, e l'insieme G delle curve C continue rettificabili di B che congiungono P_0 e P_1, che contengono di E al più un sottogruppo (che potrebbe eventualmente coincidere anche con E stesso) la cui misura lineare, contata dalla curva che si considera, sia nulla [1]; ed in modo anche che l'integrale

---

punti ove è $F_1 = 0$ è $F = 0$, identicamente per ogni valore di x' e y'; ed inoltre esiste per ognuno di tali punti un intorno in cui è sempre $F \geq 0$; allora l'integrale della F è funzione semicontinua inferiormente della linea d'integrazione ». Per la dimostrazione si procede in modo analogo a quello seguìto al n. 12 della mia Memoria, *Sul caso regolare del calcolo delle variazioni* (Rend. Circ. mat. di Palermo, 1913).

[1] Ciò significa che è possibile racchiudere il sottogruppo in un insieme finito o numerabile di archi della curva detta in modo che la somma delle lunghezze di tali archi sia minore di un numero arbitrariamente scelto.

$\int_C f(x,y)\,ds$ esista determinato e finito (adottiamo qui la definizione d'integrale del Lebesgue). Ci proponiamo di dimostrare che

fra tutte le curve di G *esiste il minimo per l'integrale* $\int_C f(x,y)\,ds$.

Sia i il limite inferiore per l'integrale sopra scritto in G, e $C_1, C_2, \ldots C_n, \ldots$ una successione di curve di G per le quali sia $\lim \int_{C_n} f\,ds = i$. L'insieme E è necessariamente chiuso. È perciò possibile determinare, corrispondentemente ad un numero positivo arbitrario M, un ϱ_M tale che la disuguaglianza $f > M$ sia verificata in tutti i punti interni a B, non di E, che appartengono ad almeno uno dei cerchi (P, ϱ_M), dove P è un elemento qualsiasi di E. Inoltre, per un noto teorema di Borel, è possibile scegliere un numero finito di punti di E: $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots P^{(r)}$, in modo che nei cerchi $(P^{(1)}, \varrho_M), \ldots (P^{(r)}, \varrho_M)$ siano contenuti tutti i punti di E. Nella porzione di B non interna a questi cerchi la $f(xy)$ è finita e continua e maggiore di zero: è quindi possibile determinare un numero $m > 0$ tale che in essa sia sempre $f > m$. Abbiamo perciò, poichè M lo si potrà sempre prendere maggiore di m, $\int_{C_n} f\,ds > m \int_{C_n} ds$,

$$\operatorname{Mimlim} \int_{C_n} ds < \frac{i}{m}.$$

Risulta così che tutte le lunghezze delle C_n restano inferiori ad un numero fisso: le C_n formano dunque una varietà compatta ed è possibile estrarre fra esse un'altra successione $C'_1, C'_2, \ldots C'_n, \ldots$ tendente ad una curva limite C. Questa C sarà necessariamente rettificabile. Occorre mostrare che appartiene a G. L'insieme E′ dei punti di E che si trovano su C ha una misura lineare, contata sulla C, nulla. Infatti, supposto il contrario e detta $\mu > 0$ la misura, risultando E′ chiuso anch'esso, sarà possibile rinchiudere i punti di E′ con un gruppo finito di archi α di C, le cui lunghezze abbiano una somma maggiore di μ, ma diversa da μ per quanto poco si vuole. Cosicchè in tutti i punti di B appartenenti ai cerchi di raggio $\frac{1}{2}\varrho_M$ ed aventi il centro sugli archi α, sarà $f > M$.

Indichiamo con $(\alpha, \frac{1}{2}\varrho_M)$ la regione formata da tutti questi punti. Indichiamo poi con α_n gli archi della curva C'_n che cadono interamente in $(\alpha, \frac{1}{2}\varrho_M)$, e con $\overline{\alpha}_n$ la somma delle loro lunghezze. È evidentemente, Mimlim $\overline{\alpha}_n > \mu$. Il contributo degli archi α_n in $\int_{C'_n} f\,ds$ è maggiore di $M\overline{\alpha}_n$, e quindi, da un certo n in poi, maggiore di $M\mu$. M è arbitrario, e se lo scegliamo in modo che sia $M > \frac{2i}{\mu}$, avremo che, da un certo indice n in poi, il contributo detto sarà maggiore di $2i$, e quindi: $\int_{C'_n} f\,ds > 2i$. Questo è assurdo perchè la successione C''_n è scelta nella C_n, e l'integrale calcolato sulla C_n tende ad i. μ dunque è zero.

L'integrale $\int_C f\,ds$ esiste determinato e finito. Invero, diciamo β gli archi di C complementari di quelli α. Poichè le curve C'_n tendono alla C, è possibile porre fra C'_n e C una corrispondenza biunivoca, continua e ordinata, in maniera tale che il punto P'_n di C'_n che corrisponde ad un punto P di C, tenda a questo al crescere all'infinito di n. Allora, agli archi β verranno a corrispondere degli archi β_n su C'_n, i quali tenderanno ai β per $n = \infty$. Consideriamo un arco $\overline{\beta}$ e il suo corrispondente $\overline{\beta}_n$. Sul primo la f resta sempre finita e continua; possiamo perciò circondarlo con una regione nella quale la f seguiti sempre a restar tale. E poichè è $f > 0$, avremo $\int_{\overline{\beta}} f\,ds \leq \text{Mimlim} \int_{\overline{\beta}_n} f\,ds$, ed anche sommando relativamente a tutti i β

$$\Sigma \int_{\overline{\beta}} f\,ds \leq \text{Mimlim}\, \Sigma \int_{\overline{\beta}_n} f\,ds .$$

Da ciò si deduce

$$\Sigma \int_{\overline{\beta}} f\,ds \leq \text{Mimlim} \int_{C'_n} f\,ds = i ,$$

ed anche, facendo tendere a zero la somma degli intervalli α, che esiste il limite di $\Sigma \int_{\overline{\beta}} f\,ds$, determinato e finito. Con ciò è dimostrata l'integrabilità della f sulla C. Questa curva appartiene così all'insieme G. Resta a mostrarsi che il suo integrale è uguale a i. Ma questo risulta subito dalla ultima disuguaglianza scritta, per essere l'integrale calcolato sulla C il limite di $\Sigma \int_{\overline{\beta}} f\,ds$, quando gli archi α tendono in somma a zero. Il teorema è dunque dimostrato.

Se la f nei punti nei quali è finita e continua ammette anche le derivate parziali prime, pure finite e continue, allora la curva minimum (che non è necessariamente unica), gode di questa proprietà: ogni suo arco interno a B e non contenente punti di E, soddisfa all'equazione differenziale di Eulero, relativa al problema qui considerato.

Nel caso della brachistocrona a velocità iniziale nulla, l'insieme E è formato da tutti i punti dell'asse x (se questo è orizzontale, e l'origine è nel punto iniziale del movimento). L'integrale da render minimo è $\int \frac{ds}{\sqrt{y}}$, e le condizioni del nostro teorema sono soddisfatte.

6. *Osservazione.* — Tutti i risultati dati precedentemente valgono anche se si sostituiscono le curve che congiungono due punti fissi con quelle che congiungono due date linee; ed ancora se si sostituiscono con le curve chiuse che circondano, per es. certi spazî lacunari.