ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCX.

1913

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1913

Matematica. — *Sul teorema di Hadamard*. Nota della dottoressa Angela Maria Molinari, presentata dal Corrisp. G. Castelnuovo [1].

Se gli elementi del determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sono reali e soddisfano alla disuguaglianza

$$(1) \qquad |a_{ij}| \leqq \mathrm{M}\,,$$

allora sarà

$$|\Delta| \leqq \mathrm{M}^n \sqrt{n^n}\,.$$

Ci proponiamo di mostrare un' interpretazione geometrica di questo teorema, interpretazione che vale anche come mezzo, assai conciso, di dimostrazione.

Intanto osserviamo che la condizione $|a_{ij}| \leqq \mathrm{M}$ non offre alcuna maggior generalità dell'altra $|a_{ij}| \leqq 1$, perchè è sempre possibile di scrivere $\Delta = \mathrm{M}^n \delta$, ove gli elementi di δ sono $\leqq 1$; poniamo dunque $\mathrm{M} = 1$.

Consideriamo l'analogo del determinante Δ, per il terzo ordine; esso è

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

e rappresenta il sestuplo del volume del tetraedro di vertici (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), $(0, 0, 0)$.

Risulta di qui, ed è noto, che il determinante (2) è invariante rispetto a qualsiasi trasformazione ortogonale; facciamo dunque passare l'asse x pel

[1] Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1913.

punto (x_1, y_1, z_1), ed il piano (x, y) per (x_2, y_2, z_2); avremo allora:

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 0 & \eta_2 & \eta_3 \\ 0 & 0 & \zeta_3 \end{vmatrix} \equiv \xi_1 \eta_2 \zeta_3 ,$$

dove $(\xi_1, 0, 0)$, $(\xi_2, \eta_2, 0)$, (ξ_3, η_3, ζ_3) sono le coordinate dei punti rispetto ai nuovi assi.

Ora, se tutti gli elementi del determinante (2) hanno modulo $\leqq 1$, gli elementi del determinante (3) sono in valore assoluto $\leqq \sqrt{3}$, quindi è evidente la ragione per cui (3) vale meno di $\sqrt{3^3}$.

Il teorema di Hadamard risulta dunque, per $n = 3$, in base a semplici considerazioni geometriche.

Ma il risultato ottenuto si estende, senza alcuna difficoltà, anche al caso generale, cioè per n dimensioni.

Consideriamo perciò il determinante Δ, e assoggettiamolo ad una trasformazione ortogonale in modo da far passare l'asse x pel punto $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$, il piano (x, y) per $(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$, e così via finchè l'iperpiano $(x, y, \ldots, t)$ passi per $(a_{n-1\,1}, a_{n-1\,2}, \ldots, a_{n-1\,n})$. Allora Δ assumerà la forma

$$(4) \qquad \Delta \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n-1\,1} & A_{n\,1} \\ 0 & A_{22} & \ldots & A_{n-1\,2} & A_{n\,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & A_{n-1\,n-1} & A_{n\,n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & A_{nn} \end{vmatrix} \equiv A_{11} A_{22} A_{33} , \ldots A_{nn} ,$$

dove $(A_{11}, 0, 0, \ldots, 0), \ldots, (A_{n1}, A_{n2}, \ldots, A_{nn})$ sono le nuove coordinate.

Ma, se tutti gli elementi $|a_{ij}|$ sono, per ipotesi, $\leqq 1$, gli elementi del determinante (4) hanno modulo $\leqq \sqrt{n}$, rappresentando le proiezioni, sugli assi, delle distanze dei punti dall'origine; dunque è valida l'ineguaglianza

$$|\Delta| \leqq \sqrt{n^n}$$

che esprime il teorema di Hadamard per n qualunque.